Линейная алгебра

Математика 2 курс

Матрица. Определитель матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя.

1. Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{n2} \\ ..... & ..... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{nm} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)$$

- Если число строк не равно числу столбцов $m \neq n$, то матрица называется ***прямоугольной***

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; A = 2\times 3$$

- Если число строк равно числу столбцов $m = n$, то матрица называется ***квадратной***. Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее ***порядком*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; A = 2\times 2$

2. Определителем (детерминатором) второго порядка называется число равное разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Определителем третьего порядка называется число. При вычислении определителя третьего порядка пользуются правилом треугольника (правило Сарруса)
Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-\left(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{23}a_{32}a_{11}\right)$$

3. ***Минором*** M_{ij} элемента $D=\left|a_{ij}\right|$ определителя называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.
4. ***Алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} определителя D называется минор этого элемента, взятый со знаком $\left(-1\right)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается A_{ij} .
5. Теорема о разложении определителя по элементам строки и столбца: ***сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя D на их алгебраические дополнения равна этому определителю.***

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+....+a_{in}A_{in} \text{ или } D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+....+a_{nj}A_{nj}$$

Решение линейных уравнений.

1. <u>Теорема Крамера</u> для системы линейных уравнений с тремя неизвестными:

Система 3 уравнений с 3 неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменатель которой является определитель системы, а числитель подучается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Алгоритм решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера.

Дано:	$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_2x+b_3y+c_2z=d_3 \end{cases}$
1. Вычисляем определитель системы	$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
2.Вычисляем определитель по x, заменяя первый столбик на столбик со свободными членами. Находим значение x.	$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$
3.Вычисляем определитель по y, заменяя второй столбик на столбик со свободными членами. Находим значение y.	$.\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$
4.Вычисляем определитель по z, заменяя третий столбик на столбик со свободными членами. Находим значение z.	$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ $\quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

Примечание:

1. Если $\Delta \neq 0; \Delta_x \neq 0; \Delta_y \neq 0; \Delta_z \neq 0$, то система линейных уравнений имеет одно решение .

2. Если $\Delta = 0$ и каждый определитель $\Delta_x = 0; \Delta_y = 0; \Delta_z = 0$, то система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений. Это имеет место толь тогда, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k.

3. Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей, при какой либо переменной, не равен нулю, то система линейных уравнений не имеет решений. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме этой переменной, пропорциональны.

2. <u>Метод Гаусса</u> – метод последовательного исключения неизвестных. Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

- умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число;
- сложение и вычитание уравнений;
- перестановку уравнений системы;
- исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.