Теория комплексных чисел

Математика 2 курс

Комплексные числа.

1. Понятие мнимой единицы.

Пусть существует такое число, квадрат которого равен (-1). Обозначим это число буквой i, тогда $\boxed{i^2=-1}$. Число i будем называть ***мнимой единицей***. Тогда $\boxed{i=\sqrt{-1}}$.

Рассмотрим степени мнимой единицы:

$i^1=i$	$i^5=i$	$i^9=i$	$i^{4n+1}=i$
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	$i^{4n+2}=-1$
$i^3=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	$i^{4n+3}=-i$
$i^4=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$	$i^{4n}=1$

Таким образом, если показатель степени числа i:

- делится на 4, то значение степени равно1;

- если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i;

- если при делении показателя на 4 получается остаток 2, то значение степени равно -1;

- если при делении на 4 остаток равен 3, то значение степени равно –i.

2. Определение комплексного числа

Числа вида $z=a+bi$***, где*** a ***и*** b ***- действительные числа;*** i ***- мнимая единица, называется комплексным числом.***

a - действительная часть числа.

bi - мнимая часть комплексного числа.

b - коэффициент при мнимой части.

Комплексные числа по виду делятся:

- если $a=0$, то комплексное число $z=bi$ - называется чисто мнимым.
- если $b=0$, то комплексное число $z=a$ - называется чисто действительным.
- если $a=0$ и $b=0$, то комплексное число равно нулю.
- два комплексных числа называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ $\qquad z_1=z_2 \Rightarrow a_1=a_2; b_1=b_2$.

- два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

$z_1 u \overline{z_2} \Rightarrow a_1=a_2; b_1=-b_2$ $\qquad z_1=a_1+b_1i$ и $\overline{z_2}=a_2-b_2i$.

- два комплексных числа называются противоположными, если они отличаются друг от друга знаками перед действительной и мнимой частями.

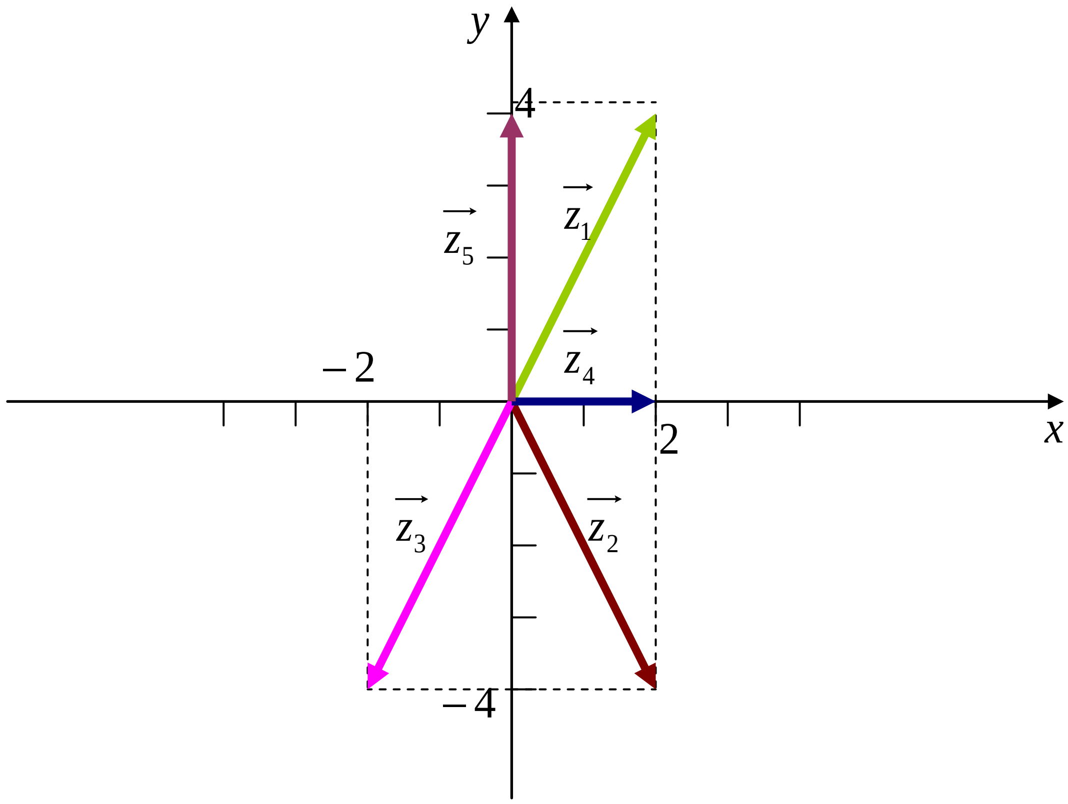
$z_1 u(-z_2) \Rightarrow a_1=|-a_2|; b_1=|-b_2|$ $\qquad z_1=a_1+b_1i$ и $-z_2=-a_2-b_2i$.

3. Геометрическое изображение комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой Z в координатной плоскости с координатами *(a; b)*. Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют ***действительной (вещественной) осью***, чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют ***мнимой осью***.

Каждой точке плоскости с координатами *(a; b)* соответствует один и только один вектор с началом О (0;0) и концом Z(a; b). Поэтому комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить в виде вектора $\vec{z}$ с началом в точке О(0;0) и концом в точке Z(a; b).

Изобразим в координатной плоскости числа: $z_1 = 2 + 4i$; $z_2 = 2 - 4i$; $z_3 = -2 - 4i$; $z_4 = 2$; $z_5 = 4i$.



- Комплексные числа $z_1 = 2 + 4i$ и $z_3 = -2 - 4i$ - противоположные, векторы <u>симметричны относительно начало координат</u>.

- Комплексное число $z_2 = 2 - 4i$ является сопряженным числу $z_1 = 2 + 4i$ и их вектора <u>симметричны относительно оси абсцисс</u>.

<u>4. Модуль и аргумент комплексного числа.</u>
Любое комплексное число имеет модель и аргумент.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина вектора $\vec{z}$, которую можно найти по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначается модуль комплексного числа буквой r $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор $\vec{z}$ с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти: $\cos\varphi = \frac{a}{r}; \sin\varphi = \frac{b}{r}$. Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi + 2\pi k, k \in Z$. Таким образом, комплексное число имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π.

<u>5. Формы записи комплексного числа.</u>
Существует три формы записи комплексного числа:

1. Алгебраическая форма: $z = a + bi$.

2. Тригонометрическая форма: $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

3.показательная форма комплексного числа (формула Эйлера): $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:

1. Находят модуль комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. для нахождения аргумента сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка комплексного числа.
3. составляем уравнения $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \sin\varphi = \dfrac{b}{r}$ и по решению одного из них определяем аргумент.
4. записываем комплексное число в тригонометрической форме.

Совместные действия над комплексными числами.

Пусть даны два комплексных числа, заданных в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Тогда:

1. ***Сложение и вычитание*** выполняются над комплексными числами, заданных в алгебраической форме:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

2. При ***умножении*** двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

3. При ***делении*** комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

4. При ***возведении в степень*** комплексного числа, заданного в тригонометрический форме, модуль числа нужно возвести в n-ю степень, а аргумент умножить на число n (формула Муавра):

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}.$$

5. ***Корень n-й степени*** из комплексного числа имеет ровно n значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$