Интегральное исчисление

Лекция 8-9

Раздел: Интегральное исчисление

Первообразная. Неопределенный интеграл.

Интегральное исчисление – это нахождение новой функции, производная которой равна заданной функции.

Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют ***первообразной***

1. **Первообразная.**

Определение: ***Дифференцируемая функция $F(x)$, определенная на некотором промежутке X, называется первообразной для функции $f(x)$, определенной на том же промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$, или, что то же самое, $dF(x)=f(x)dx$.***

Дано: $f(x)=2x$ | $F'(x)=f(x)$

$F(x)=?$ | $F_1'(x)=(x^2)'=2x; F_2'(x)=(x^2+5)'=2x;$ $F_3'(x)=(x^2-2)'=2x; F_4'(x)=(x^2-100)'=2x$

$F_1(x)=x^2 \leftarrow \boxed{f(x)=2x} \rightarrow F_4(x)=x^2-100$

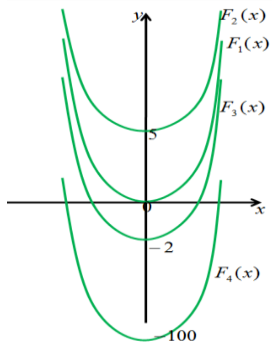
$F_2(x)=x^2+5 \qquad F_3(x)=x^2-2$

Дифференцирование функции – однозначная операция, т.е. если функция имеет производную, но только одну. Это утверждение непосредственно следует из определения предела и производной: если функция имеет предел, то толь один. Обратная операция – отыскание первообразной – не однозначна. Из примера, любые две первообразные $F_2(x)=x^2+5$ и $F_3(x)=x^2-2$ данной функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Теорема:***Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где C- любое действительное число.***

2. **Неопределенный интеграл**.

Определение: ***Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке.*** $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$



$f(x)dx$ -подынтегральное выражение; $f(x)$ - подынтегральная функция; x – переменная интегрирования; $\int$ - знак неопределенного интеграла; C – постоянная интегрирования.

$\int 2xdx=x^2; \int 2xdx=x^2+5; \int 2xdx=x^2-2; \int 2xdx=x^2-100$

Геометрический смысл: Неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси ординат.

Основные свойства

Словесная формулировка	Математическая запись
1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.	$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.	$d\int f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx$
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.	$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$
4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.	$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$
5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности.	$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Табличные интегралы:

$$\int dx = x + C \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \qquad \int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

Методы интегрирования.

1. Непосредственное интегрирование – это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

алгоритм	решение
	$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$
1. Тождественные преобразования подынтегральной функции. Разделим почленно подынтегральную функцию на x^2.	$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx = \int\left(\frac{3x^4}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{7}{x^2}\right)dx =$ $= \int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx =$
2. Применяем свойств неопределенного интеграла: - неопределенный интеграл от алгебраической суммы; - вынесение постоянного множителя из-под интеграла.	$\int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx = \int 3x^2dx + \int 2dx - \int\frac{3dx}{x} + \int\frac{7dx}{x^2} =$ $= 3\int x^2dx + 2\int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx =$
3. Применяем табличные интегралы: - интеграл от степенной функции; - интеграл от дифференциала аргумента; - интеграл от обратной пропорциональности	$3\int x^2dx + 2\int dx - 3\int\frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx = 3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\cdot x - 3\cdot\ln x + 7\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$ $= \frac{3x^3}{3} - 2x - 3\ln x + \frac{7x^{-1}}{-1} + C = \frac{3x^3}{3} - 2x - 3\ln x - \frac{7}{x} + C.$

2. Метод замены переменной (подстановка) – это путем введения новой переменной интегрирования, удается свести заданный интеграл к интегралу с новой переменной, который можно вычислить, используя непосредственное интегрирование.

<u>Вывод формул (наизусть!!!)</u>

$$1)\int (kx+b)^{\alpha}dx = \left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx = t'dt \\ kdx = dt \\ dx = \frac{dt}{k} \end{array}\right| = \int t^{\alpha}\cdot\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}\int t^{\alpha}dt = \frac{1}{k}\cdot\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)} + C$$

$$2)\int \sin\left(kx+b\right)dx=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \sin t\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \sin tdt=\frac{1}{k}\cdot\cos t+C=\frac{\cos\left(kx+b\right)}{k}+C$$

$$3)\int \cos\left(kx+b\right)dx=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \cos t\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \cos tdt=-\frac{1}{k}\cdot\sin t+C=-\frac{\sin\left(kx+b\right)}{k}+C$$

$$4)\int \frac{dx}{\sin^2\left(kx+b\right)}=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \frac{1}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{k}\cdot ctgt+C=-\frac{ctg\left(kx+b\right)}{k}+C$$

$$5)\int \frac{dx}{\cos^2\left(kx+b\right)}=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt=-\frac{1}{k}\cdot tgt+C=\frac{tg\left(kx+b\right)}{k}+C$$

$$6)\int \frac{dx}{kx+b}=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{k}\ln\left|t\right|+C=\frac{\ln\left|t\right|}{k}+C$$

$$7)\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}}=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{k}\cdot 2\sqrt{t}+C=\frac{2\sqrt{kx+b}}{k}+C$$

$$8)\int a^{kx+b}dx=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int a^t\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int a^t dt=\frac{1}{k}\cdot\frac{a^t}{\ln a}+C=\frac{a^{kx+b}}{k\ln a}+C$$

$$9)\int e^{kx+b}dx=\left|\begin{array}{l} kx+b=t \\ (kx+b)'dx=t'dt \\ kdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{k} \end{array}\right|=\int e^t\cdot\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int e^t dt=\frac{1}{k}\cdot e^t+C=\frac{e^{kx+b}}{k}+C$$

$$10)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}dx=\int \frac{1}{a\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{a}=t\\ \left(\frac{x}{a}\right)'dx=t'dt\\ \frac{1}{a}dx=dt\\ dx=adt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\left(1-(t)^2\right)}}\cdot adt=\frac{a}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$11)\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}dx=\int \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}dx=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{a}=t\\ \left(\frac{x}{a}\right)'dx=t'dt\\ \frac{1}{a}dx=dt\\ dx=adt\end{array}\right|=\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot adt=$$

$$=\frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{a}arctgt+C=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

$$12)\int tgdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ (\cos x)'dx=t'dt\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{array}\right|=\int -\frac{dt}{t}=-\int \frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$

$$13)\int ctgdx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ (\sin x)'dx=t'dt\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C$$

Определенный интеграл

1. <u>Определение:</u> ***Если предел интегральных сумм, при достаточном малом разбиении отрезков, стремится к одному и тому же конечному пределу A, то число A называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке от a до b.*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = A$

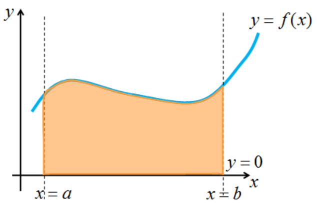
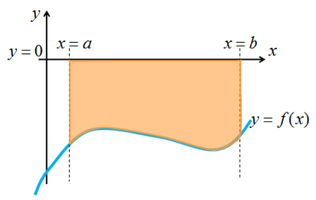
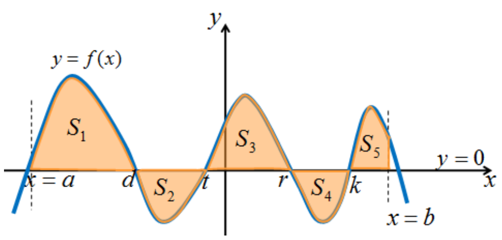
Определенный интеграл от функции f(x) на отрезе от a до b равен разности первообразных взятых от верхнего и нижнего пределов интегрирования.

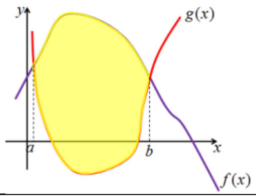
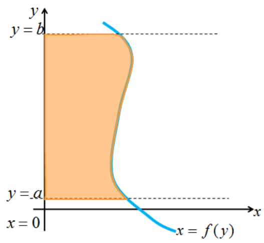
<u>2. Геометрический смысл определенного интеграла</u>

Свойства площадей плоских фигур

Словесная формулировка	***Математическая формулировка***
Площадь величина положительная	$S > 0$
Равные площади имеют равные площади	$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow S_1 = S_2$
Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей	$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$
Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.	$[S] = кв.ед$

Варианты расположения плоских фигур

Дано	***рисунок***	***формула***
$y = f(x) > 0$ $x = a; x = b; y = 0$		$S = \int\limits_a^b f(x)dx$
$y = f(x) < 0$ $x = a; x = b; y = 0$		$S = \left\lvert \int\limits_a^b f(x)dx \right\rvert$
$y = f(x)$ $x = a; x = b; y = 0$		$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$ $S_1 = \int\limits_a^d f(x)dx; S_2 = \left\lvert \int\limits_d^t f(x)dx \right\rvert$ $S_3 = \int\limits_t^r f(x)dx; S_4 = \left\lvert \int\limits_r^k f(x)dx \right\rvert$ $S_5 = \int\limits_k^b f(x)dx$ $S = \int\limits_a^d f(x)dx + \left\lvert \int\limits_d^t f(x)dx \right\rvert + \int\limits_t^r f(x)dx + \left\lvert \int\limits_r^k f(x)dx \right\rvert + \int\limits_k^b f(x)dx$

$y_1 = f(x)$ $y_2 = g(x)$		$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$
$x = f(y) > 0$ $y = a; y = b; x = 0$		$S = \int_a^b f(y)dy$

3. Применение определенного интеграла в геометрии

задача	формула
Вычисление объема тела по известным площадям его поперечных сечений	$V = \int_a^b S(x)dx$
Вычисление объема тела вращения	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
Длина дуг кривой	$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x) \right)^2} dx$
Площадь поверхности вращения	$S = \int_a^b y\sqrt{1 + \left(y'(x) \right)^2} dx$

4. Применение определенного интеграла в физике.

задача	формула
Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt; v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$
Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела	$A = \int_a^b f(x)dx$
Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины	$A = k\int_{x_1}^{x_2} xdx$
Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластину	$P = 9,81\gamma \int_a^b xydx$ $\gamma - плотность\_жидкости$
Вычисление массы стержня переменной плотности	$m = \int_a^b \rho(x)dx$
Вычисление электрического заряда	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
Вычисление теплоты, производимое телом	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$
Работа газа при его расширении	$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV$