Дифференциальное исчисление

Лекции 8-10

Предел функции в точке. Непрерывность функции.

<u>1. Определение предела функции:</u> ***Число А называется пределом функции f(x) при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta; x \neq x_0$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.***

Если *A* есть предел функции *f(x)* при *x*, стремящемся к x_0, то пишут $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

<u>2. Условие существования предела функции:</u> Предел функции при *x*, стремящемся к x_0 существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела, т.е. $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$, *то* $\lim_{x \to x_0} f(x) -$ *существует* .

<u>3.Вычисление пределов</u>

При вычислении пределов часто встречаются неопределенности:

вид неопределенности	правило
$\frac{c}{0} = \infty$	Связь между БМФ и ББФ
$\frac{c}{\infty} = 0$	Связь между ББФ и БМФ
$\frac{0}{0}$	***1 правило:*** чтобы раскрыть данную неопределенность, надо числитель и знаменатель разложить на множители, и сократить на тот множитель, которой привел к неопределенности.
$\frac{0}{0}$	***2 правило:*** если данная неопределенность зависит от иррациональности (корень), надо перевести иррациональность из знаменателя в числитель, или из числителя в знаменатель, и сократить на множитель, который привел к неопределенности.
$\frac{\infty}{\infty}$	Чтобы раскрыть данную неопределенность надо числитель и знаменатель дроби разделить на переменную высшей степени.
$\infty \pm \infty$	Чтобы раскрыть данную неопределенность, надо умножить и разделить на выражение сопряженное данному.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

<u>4. Непрерывность функции</u>

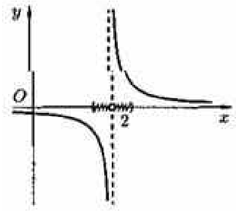
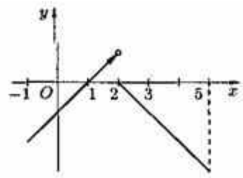
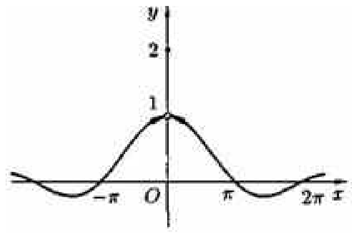
<u>1 Определение:</u> ***Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, принадлежащей области определения функции, если для любого положительного числа ε существует такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta; x \neq x_0$, будет выполнено неравенство*** $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

<u>2 Определение:</u> ***Пусть функция y=f(x) определена в точке x_o и в некоторой окрестности этой точки. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.*** $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$**.** Равенство означает выполнение трех условий:

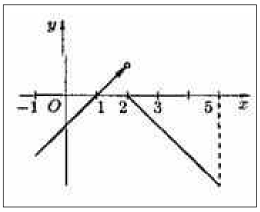
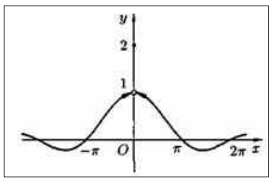
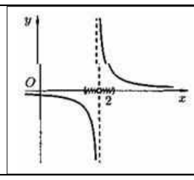
1) функция *f (x)* определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция *f(x)* имеет предел при $x \to x_o$;
3) предел функции в точке x_o равен значению функции в этой точке.

<u>Условие непрерывности функции в точке:</u> если односторонние пределы функции в точке x_0 существуют и равны между собой, то существует предел функции в точке x_0, следовательно, функция в точке x_0 будет непрерывна.

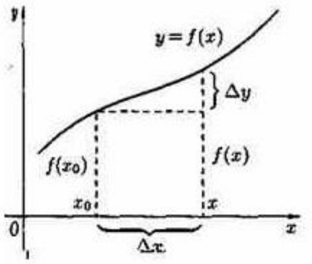
Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***. Если $x=x_0$ — точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

Случаи появления разрывов	Рисунок
1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\left\|\frac{1}{0}\right\|=\infty$	
2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x\to x_0$. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$	
3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, предел функции в точке x_0 существует, но этот предел не равен значению функции в точке x_0. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$	

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода:
- точка разрыва x_0 **называется точкой разрыва первого** рода функции $y=f(x)$, если в этой точке односторонние пределы существуют, конечны и не равны. График функции в этой точке претерпевает «скачок» равный разности между правым и левым пределом функции в этой точке;
- точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y=f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. График функции в этой точке устремляется в бесконечность.

пример	Вид разрыва	Рисунок
$f(x)=\begin{cases} x-1, & если\ \text{-}1\le x<2 \\ 2-x, & если\ 2\le x\le 5\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$ точка $x_0=2$ называется точкой конечного разрыва	
$g(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & если\ x\neq 0 \\ 2, & если\ x=0\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ точка $x_0=0$ называется точкой устранимого разрыва. Положив $g(x)=1$ (вместо $g(x)=2$) при $x=0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной	
$y=\frac{1}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\left\|\frac{1}{0}\right\|=\infty$ $x_0=2$ -точка разрыва второго рода.	

3. Непрерывность функции через приращения функции и аргумента.



Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$. Возьмем произвольную точку $x_o \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x-x_o$ называется ***приращением аргумента*** x в точке x_0 и обозначается Δx («дельта х»): $\Delta x=x-x_0$. Отсюда $x=x_0+\Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x)-f(x_0)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

<u>3 Определение:</u> Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0); \quad \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$$

Производная. Физический и геометрический смысл производной. Дифференциал функции.

1. Определение. Формулы дифференцирования

Словесная формулировка	Математическая формулировка
Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует.	$y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Название формулы	**формула**
Производная постоянной величины	$C' = 0$
Производная аргумента	$x' = 1$
Производная алгебраической функции	$(u \pm v)' = u' + v'$
Производная произведения	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
Частный случай произведения функций	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
Производная частного двух функций	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Производная сложной функции	$(u(y(x)))' = u' \cdot y'$
Производная обратной функции	$(u^{-1})' = \dfrac{1}{u'}$
Производная степенной функции	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$
Производная функции квадратного корня	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Производная обратной пропорциональности	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Производная показательной функции	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
Частный случай показательной функции	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
Производная логарифмической функции	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$
Частный случай логарифмической функции	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
Производная синуса	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
Производная косинуса	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
Производная тангенса	$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
Производная котангенса	$(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
Производная арксинуса	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Производная арккосинуса	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Производная арктангенса	$(\mathrm{arc}\,tgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
Производная арккотангенса	$(\mathrm{arc}\,ctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
Производная линейной функции	$(kx+b)' = k$

2. Физический и механический смысл производной.

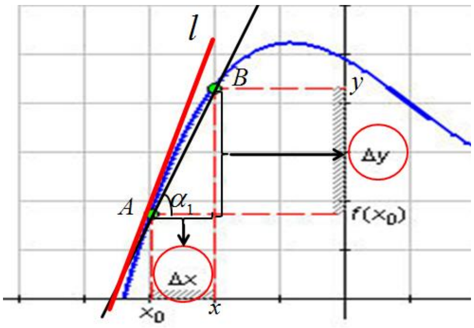
Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в этой точке, т.е. скорость процесса, описываемого зависимостью $y=f(x)$.

Если $s=s(t)$ - закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ - скорость движения в момент времени t. Тогда скорость изменения скорости этого движения - есть ускорение в этот момент времени.

$\boxed{a(t)=v'(t)}$ $\boxed{v(t)=s'(t)}$ $a(t)=v'(t)=s''(t)$

Таким образом, ***ускорение прямолинейного движения тела в данный момент времени равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента времени.***

3. Геометрический смысл производной



секущая АВ имеет угловой коэффициент $k_1=tg\alpha_1$

$tg\alpha_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; $x\to x_0 \Rightarrow \Delta x\to 0$ $AB\to l$ $\alpha_1\to\alpha$

$tg\alpha=\lim\limits_{\alpha_1\to\alpha} tg\alpha_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x_0)$ Угловой коэффициент касательной определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. $\boxed{y'(x_0)=tg\alpha=k}$

Определение: ***Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику в той же точке равно тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.***

Расположение касательной

Значение производной в точке	Угловой коэффициент касательной	Тангенс угла наклона касательной	Значение угла	Расположение касательной
$y'(x_0)=0$	$k=0$	$tg\alpha=0$	$\alpha=0$	$l \parallel Ox$
$y'(x_0)>0$	$k>0$	$tg\alpha>0$	$0<\alpha<90^\circ$	с осью Ox образует острый угол
$y'(x_0)<0$	$k<0$	$tg\alpha<0$	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	с осью Ox образует тупой угол
$y'(x_0)=\infty$	$k=\infty$	$tg\alpha=\infty$	$\alpha=90^\circ$	$l\perp Ox$

3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется линейная относительно величина $f'(x_0)\Delta x$, составляет главную часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0.

$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ или $dy=y'\Delta x$

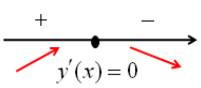
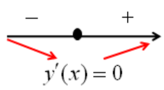
$dy=y'\cdot dx$	*Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал ее аргумента*
$y'=\dfrac{dy}{dx}$	*Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента*

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

$$\boxed{f(x)=f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x+f(x_0)}$$

Исследование функций с помощью производных.

Полная схема исследования функции

этапы	***пояснения***
1. Вид функции	1.1 Целые $y = P(x)$ 1.2 Дробно-рациональные $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 1.3 Сложные $y = f\left(g(x)\right)$
2. Область определения	2.1 Область определения целых функций – R 2.2 Область определения дробно-рациональных функций – это множество значений x, при которых знаменатель не должен обращать в нуль.
3. Четность, нечетность	3.1 Условие четности: $y(-x) = y(x)$. График симметричен относительно оси ординат, т.е. осевая симметрия 3.2 Условие нечетности: $y(-x) = -y(x)$. График симметричен относительно начала координат, т.е. центральная симметрия
4. Периодичность	Для тригонометрических функций: $y = \sin x; y = \cos x; y = tgx; y = ctgx$
5. Точки пересечения с осями координат	5.1 С осью абсцисс, т.е. $y = 0$. Решаем полученное уравнение. 5.2 С осью ординат, т.е. $x = 0$. Нуль подставляем в формулу данной функции.
6. Непрерывность	6.1 Целые функции – всегда непрерывны 6.2 Дробно-рациональные функции имеют разрывы второго рода в тех точках, абсциссы которых не вошли в область определения функции $\lim\limits_{x \to a} y(x) = \infty$
7. Монотонность функции (возрастание, убывание)	7.1 Вычисляем производную первого порядка. 7.2 Приравниваем к нулю и находим стационарные или критические точки первого порядка 7.3 Полученные точки отмечаем на числовой прямой в порядке возрастания. 7.4 Определяем знаки первой производной на полученных числовых промежутках. 7.5 Используя достаточное условие монотонности функции, находим промежутки монотонности функции. $y'(x) > 0 \Rightarrow y_{возр}\left(x\right)$ $y'(x) < 0 \Rightarrow y_{убыв}\left(x\right)$
8. Экстремум функции	8.1 Определяем точки экстремума: -максимум  ;- минимум  8.2 Экстремум функции: $y_{\max}(x)$ и $y_{\min}(x)$
9. Выпуклость	9.1 Вычисляем производную второго порядка. 9.2 Приравниваем к нулю и находим стационарные или критические точки второго порядка 9.3 Полученные точки отмечаем на числовой прямой в порядке возрастания. 9.4 Определяем знаки второй производной на полученных числовых промежутках. 9.5 Используя достаточное условие выпуклости графика функции, находим промежутки выпуклости графика функции. $y''(x) > 0 \Rightarrow y_{вниз}\left(x\right)$ $y''(x) < 0 \Rightarrow y_{вверх}\left(x\right)$

<table>
<tr><td>10. Точки перегиба</td><td>$\pm$ $\mp$
$y''(x)=0$</td></tr>
<tr><td>11. Асимптоты</td><td>11.1 Целые функции асимптот не имеют.
11.2 Дробно-рациональные функции имеют асимптоты:
Признаки появления асимптот (мнемонические правило)
1. Через точки, абсциссы которых не вошли в область определения функции, проходят вертикальные асимптоты: условие $\lim\limits_{x\to a} y(x)=\infty$, уравнение: $x=a$.
2. Если степень числителя равна степени знаменателя, то дробно-рациональные функции имеют горизонтальные асимптота: условие $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=b$; уравнение : $y=b$.
3. Если степень числителя на единицу больше степени знаменателя, то дробно-рациональные функции имеют наклонную асимптоту: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)$; уравнение $y=kx+b$</td></tr>
<tr><td>12. Сводная таблиц</td><td>
<table>
<tr><td>$D(y)$</td><td></td></tr>
<tr><td>четность</td><td></td></tr>
<tr><td>периодичность</td><td></td></tr>
<tr><td>$y=0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x=0$</td><td></td></tr>
<tr><td>непрерывность</td><td></td></tr>
<tr><td>$y_{возр}(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y_{убыв}(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>экстремум функции</td><td></td></tr>
<tr><td>$y_{вверх}(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$y_{вниз}(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>точки перегиба</td><td></td></tr>
<tr><td>асимптоты</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>13. Построение графика</td><td>13.1 Отмечаем асимптоты
13.2 Отмечаем точки перегиба
13.3 Отмечаем точки экстремума функции
13.4 Отмечаем точки пересечения графика с осями координат
13.5 Плавно соединяем</td></tr>
</table>