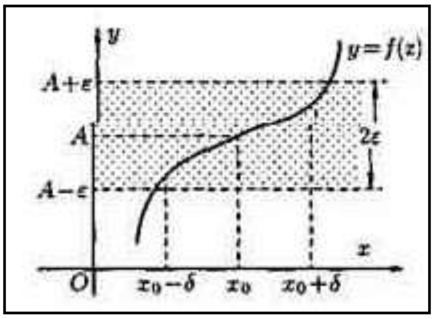
Предел функции

1. Определение предела функции: Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta; x \neq x_0$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

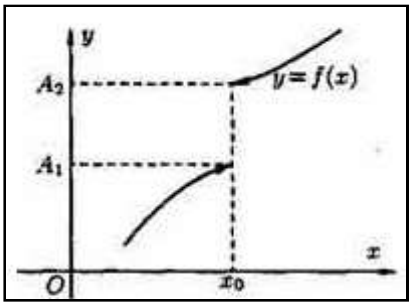
Если A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрическая иллюстрация предела функции дана на рисунке. Значение δ по данному ε для точке x_0 определяется так: проводятся прямые $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, затем δ выбирается таким образом, чтобы для всех x $x \neq x_0$, из интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ соответствующие значения функции находились в полосе, ограниченной проведенными прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. При этом о значении функции в точке x_0 ничего не предполагается – оно может равняться A, может отличаться от A на какую угодную величину, может даже не существовать. Иными словами, точки графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A+\varepsilon$, $y=A-\varepsilon$. Функция не может иметь двух разных пределов.



***2. Определение односторонних пределов*:** Число A_1 называется левым пределом функции в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из неравенства $x_0 - \delta < x < x_0$ следует неравенства $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

Число A_2 называется правым пределом функции в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из неравенства $x_0 < x < x_0 + \delta$ следует неравенства $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

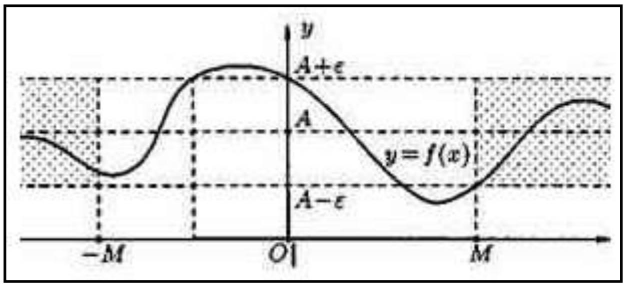


$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *- левый предел* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ *- правый предел*

3. Условие существования предела функции: Предел функции при x, стремящемся к x_0 существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - $*существует*.

4. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке $(-\infty;\infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Коротко это определение можно записать так $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. ***Геометрический смысл*** этого определения таков: для любого $\varepsilon>0$, существует $M>0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A+\varepsilon$ и $y=A-\varepsilon$



5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции:

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой (ББФ)*** при $x \to x_0$, если для любого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Функция $y=f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой (ББФ)*** при $x \to \infty$, если для любого числа $M>0$ найдется такое число $N=N(M)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Функция *f(x)* называется ***бесконечно малой (БМФ)*** при $x \to x_0 \left(x \to \infty\right)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0; \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Связь между ББФ и БМФ:

- если *f(x)* – ББФ, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - БМФ; - если *f(x)* – БМФ, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - ББФ.

6. Основные теоремы о пределах функций: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x); \lim\limits_{x\to x_0} g(x); \lim\limits_{x\to\infty} f(x); \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, то….

Словесная формулировка	Математическая формулировка
1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
4. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$
5. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)};\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$

Вычисление пределов

При вычислении пределов часто встречаются неопределенности:

вид неопределенности	правило
$\dfrac{c}{0}=\infty$	Связь между БМФ и ББФ
$\dfrac{c}{\infty}=0$	Связь между ББФ и БМФ
$\dfrac{0}{0}$	***1 правило:*** чтобы раскрыть данную неопределенность, надо числитель и знаменатель разложить на множители, и сократить на тот множитель, которой привел к неопределенности.
$\dfrac{0}{0}$	***2 правило:*** если данная неопределенность зависит от иррациональности (корень), надо перевести иррациональность из знаменателя в числитель, или из числителя в знаменатель, и сократить на множитель, который привел к неопределенности.
$\dfrac{\infty}{\infty}$	Чтобы раскрыть данную неопределенность надо числитель и знаменатель дроби разделить на переменную высшей степени.
$\infty\pm\infty$	Чтобы раскрыть данную неопределенность, надо умножить и разделить на выражение сопряженное данному.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Непрерывность функции

1. Непрерывность функции в точке.

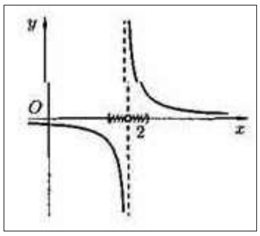
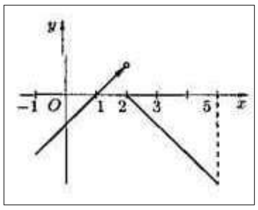
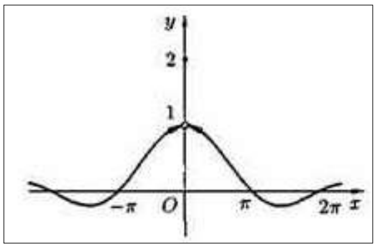
<u>1 Определение:</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, принадлежащей области определения функции, если для любого положительного числа ε существует такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta; x \neq x_0$, будет выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

<u>2 Определение:</u> Пусть функция *y=f(x)* определена в точке x_o и в некоторой окрестности этой точки. Функция *y=f(x)* называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Равенство означает выполнение трех условий:

1) функция *f (x)* определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция *f(x)* имеет предел при $x \to x_o$;
3) предел функции в точке x_o равен значению функции в этой точке.

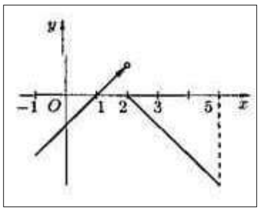
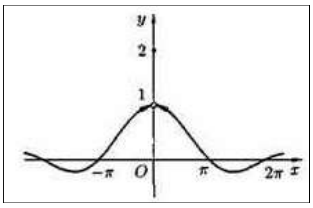
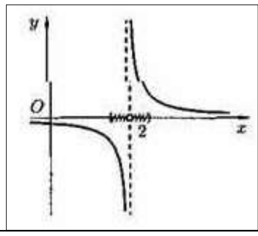
<u>Условие непрерывности функции в точке:</u> если односторонние пределы функции в точке x_0 существуют и равны между собой, то существует предел функции в точке x_0, следовательно, функция в точке x_0 будет непрерывна.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***. Если $x=x_0$ — точка разрыва функции *y=f(x),* то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

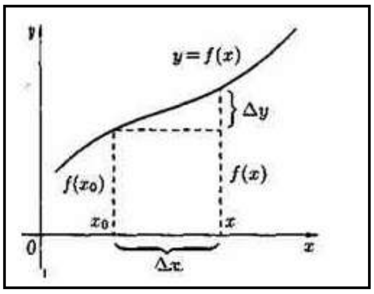
Случаи появления разрывов	Рисунок
1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \left\|\frac{1}{0}\right\| = \infty$	
2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела *f(x)* при $x \to x_0$. $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1; \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 0$	
3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, предел функции в точке x_0 существует, но этот предел не равен значению функции в точке x_0. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$	

2. Точки разрыва. Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

- Точка разрыва x_0 **называется точкой разрыва первого** рода функции *y=f(x),* если в этой точке односторонние пределы существуют, конечны и не равны. График функции в этой точке претерпевает «скачок» равный разности между правым и левым пределом функции в этой точке.
- Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции *y=f(x),* если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. График функции в этой точке устремляется в бесконечность.

пример	Вид разрыва	Рисунок
$f(x)=\begin{cases} x-1, \; \textit{если -1} \le x < 2 \\ 2-x, \; \textit{если 2} \le x \le 5 \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1; \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=0$ точка x_0 =2 называется точкой конечного разрыва	
$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \; \textit{если } x\ne 0 \\ 2, \; \textit{если } x=0 \end{cases}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$ точка *x_0=0* называется точкой устранимого разрыва. Положив *g(x)=1* (вместо *g(x)=2*) при *x=0*, разрыв устранится, функция станет непрерывной	
$y=\dfrac{1}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\left\|\dfrac{1}{0}\right\|=\infty$ x_0=2 -точка разрыва второго рода.	

3. Непрерывность функции через приращения функции и аргумента.



Пусть функция *y=f(x)* определена в некотором интервале *(a;b)*. Возьмем произвольную точку *x_oє(a;b)*. Для любого *xє(a;b)* разность *x-x_o* называется ***приращением аргумента*** *x* в точке *x_0* и обозначается Δx («дельта х»): $\Delta x=x-x_0$. Отсюда $x=x_0+\Delta x$.
Разность соответствующих значений функций *f(x)-f(x_0)* называется ***приращением функции*** *f(x)* в точке *x_0* и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

<u>3 Определение:</u> Функция *f(x)* называется непрерывной в точке *x_0*, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$$

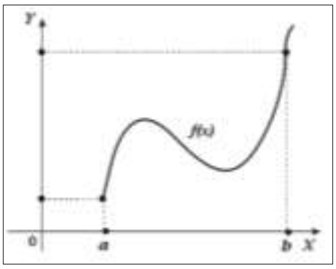
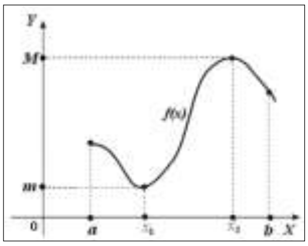
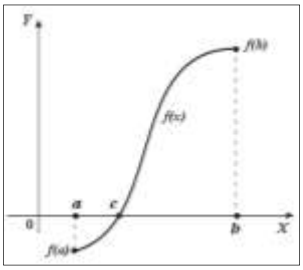
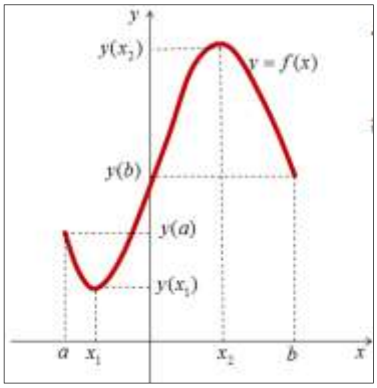
Свойства непрерывных функций

1. Свойства непрерывных функций в точке.

- Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.
- Частное двух непрерывных функций $f(x)/g(x)$ – есть непрерывная функция при условии, что функция $g(x)$ не равна нулю в точке x_0.
- Суперпозиция (сложные функции) непрерывных функций – есть непрерывная функция.

2. ***Непрерывность функции на промежутке***. Функция называется непрерывная на интервале от a до b, если она непрерывна в каждой точке интервала. Функция называется непрерывная на отрезке от a до b, если она непрерывна на интервале от a до b, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

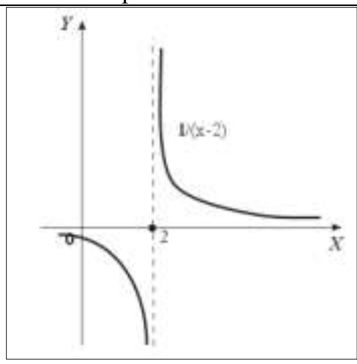
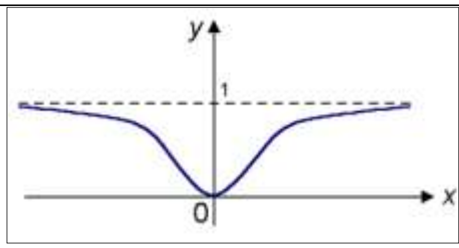
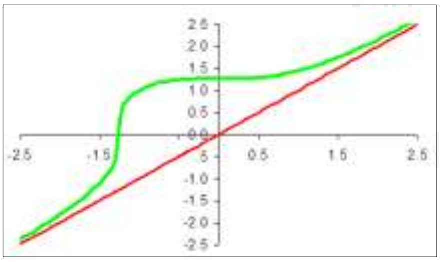
Свойства непрерывных функций на промежутке

Свойства	Геометрическая интерпретация
1. ***Первая теорема Вейерштрасса:*** Если функция непрерывна на отрезке от a до и b, то функция ограничена на этом отрезке.	
2. ***Вторая теорема Вейерштрасса:*** Если функция непрерывна на отрезке от a до и b, то существуют, по крайней мере, точки, в которых функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения.	 $m \le f(x) \le M$
3. ***Первая теорема Больцано – Коши:*** Если функция непрерывна на отрезке от a до b и принимает на его концах различные по знаку значения, то существует, по крайней мере, одна точка принадлежащая отрезке от a до b в которой функция обращается в нуль.	 $\left.\begin{matrix} f(a)<0 \\ f(b)>0 \end{matrix}\right\} f(c)=0$
4. ***Вторая теорема Больцано – Коши:*** Если функция непрерывна на интервале от a до b и не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, то она имеет один и тот же знак во всех точках интервала.	 $\left.\begin{matrix} y(a)>0 \\ y(b)>0 \end{matrix}\right\} y(x_1)\neq 0; y(x_2)\neq 0$

Асимптоты

1. Определение: Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

2. Виды асимптот

вид	Условие существования	уравнение	изображение
Вертикальная	$\lim\limits_{x\to\pm a} y(x)=\infty$	$x=\pm a$	
Горизонтальная	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=b$	$y=b$	
Наклонная	$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)$	$y=kx+b$	

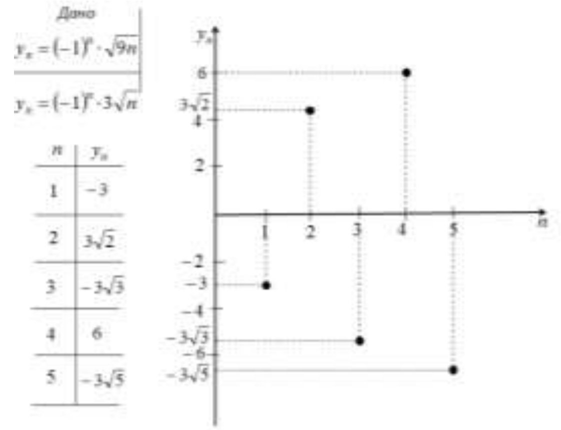
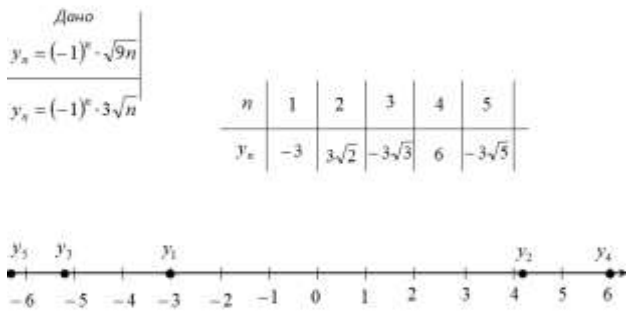
Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

1. <u>Определение:</u> Если каждому числу *n* из натурального ряда чисел *1,2,3….n* поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел x_1, $x_2 \dots x_n$ – называется ***числовой последовательностью***. $\{x_n\} = (x_n): x_1; x_2; \dots . x_n$, где $x_1; x_2; \dots$ - элементы последовательности; x_n - общий член последовательности; n - номер элемента.

2. <u>Способы задания:</u>

- ***аналитический*** – это задание последовательности с помощью формулы, указывающей, как по номеру члена последовательности вычислить сам член последовательности;
- ***рекуррентный (индуктивный)*** – это задание последовательности с помощью первого члена последовательности и формулы, зависимости последующего члена последовательности от предыдущего;
- ***табличный*** – задание последовательности в виде таблицы. Используется для конечных последовательностей;
- ***словесный***– задание последовательности в виде описания члена последовательности.

3. <u>Графическое изображение числовой последовательности</u>

на координатной плоскости	на числовой прямой
	

4. <u>Свойства числовой последовательности</u>

Словесная формулировка	Математическая формулировка
Последовательность называется ***возрастающей***, если каждый последующий член больше предыдущего.	$x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0$
Последовательность называется ***убывающей***, если каждый последующий член меньше предыдущего.	$x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0$
Последовательность называется ***постоянной***, если каждый последующий член равен предыдущему.	$x_{n+1} = x_n \Rightarrow x_{n+1} - x_n = 0$
Последовательность называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если существует число *M (m)* такое, что любой элемент этой последовательности меньше или равно (больше или равно) числу *M (m)*	$x_n \le M - \text{ограничено сверху}$ $x_n \ge M - \text{ограничено снизу}$ $m \le x_n \le M - \text{ограничено снизу и сверху}$
Последовательность называется ***неограниченной***, если для любого положительного числа*A* существует элемент этой последовательности, который по модулю больше этого числа *A*.	$\lvert x_n \rvert > A$

5. <u>Предел числовой последовательности</u>

Число *a* называется пределом последовательности (a_n), если для каждого положительного числа *ε* найдется такое натуральное число *N*, что для любого *n>N* выполняется неравенство $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предел – расходящейся.

Геометрический смысл: если последовательность сходится к числу a, это означает, что каждой ε-окрестности точки a принадлежат все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера, а вне её может находиться лишь конечное число членов.

6. Необходимое и достаточное условие существования предела числовой последовательности:

Необходимое условие: если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Достаточное условие (теорема Вейерштрасса): всякая монотонная, ограниченная последовательность имеет предел.

7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Последовательность называется ***бесконечно малой (БМП)***, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=0$. Свойства бесконечно малых последовательностей:

- сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой;
- произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой;
- произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой;
- для того чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=a$ необходимо и достаточно, чтобы $a_n=a+\alpha_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Последовательность называется ***бесконечно большой (ББП)***, если для любого $M>0$ найдется такое натуральное число N, что при $n\geq N$ выполняется неравенство $\left|a_n\right|>M$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=\infty$ и все числа a_n , начиная с некоторого номера N, положительны, то последовательность $\left(a_n\right)$ стремится к $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=+\infty$; если все числа a_n , начиная с некоторого номера N, отрицательны, то последовательность $\left(a_n\right)$ стремится к $-\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=-\infty$.

Если $\left(a_n\right)$ - ББП, то $1/\left(a_n\right)$ - БМП. Наоборот, если $\left(\alpha_n\right)$ - БМП, то $1/\left(\alpha_n\right)$ - ББП.

8. Теоремы о пределах последовательностей.

Словестная формулировка	Математическая формулировка
Если последовательности $\left(a_n\right)$ и $\left(b_n\right)$ сходятся, то последовательность $\left(a_n\pm b_n\right)$ также сходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
Если последовательности $\left(a_n\right)$ и $\left(b_n\right)$ сходятся, то последовательность $\left(a_n\cdot b_n\right)$ также сходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
Если последовательности $\left(a_n\right)$ и $\left(b_n\right)$ сходятся и $b_n\neq 0$, то последовательность $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ также сходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n};\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$

9. Число «*е*» Рассмотрим числовую последовательность заданную формулой $\left(a_n\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Данная последовательность монотонна возрастающая и ограниченна снизу 2, следовательно, по теореме Вейерштрасса: всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел, последовательность $\left(a_n\right)$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Число «е» иррациональное число *2<e<3* и равно $e\approx 2{,}7$.