Определение функции. Способы задания функций. Виды функций. Свойства функции.

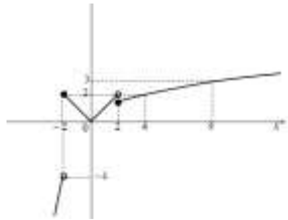
1. Определение: Функцией называется зависимость величины *y* от величины *x*, если каждому рассматриваемому значению величины *x* соответствует определенное значение величины *y*.

$y = f(x)$, где *x* – независимая переменная (аргумент); *y* – зависимая переменная (значение функции).

2. Виды функций

- **Целые** функции $y = P(x)$, где *P(x)* – многочлен. Пример: $y = kx + b; y = ax^2 + bx + c; y = \sqrt{x}$;

- **Дробно-рациональные** функции $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Пример: $y = \dfrac{k}{x}$;



-**Кусочные**. Функция, которая задается формулами, действующими на различных участках изменения аргумента. Пример: $y = \begin{cases} -x^2; x < -2 \\ |x|; -2 \le x < 2 \\ \sqrt{x}; x \ge 2 \end{cases}$. График (см. рисунок)

- **Обратимые**. Функция называется обратимой, если разным значениям аргументов из области определения функции отвечают разные значения функции. Условие обратимости $(x_1 \ne x_2) \Rightarrow (y_1 \ne y_2)$.

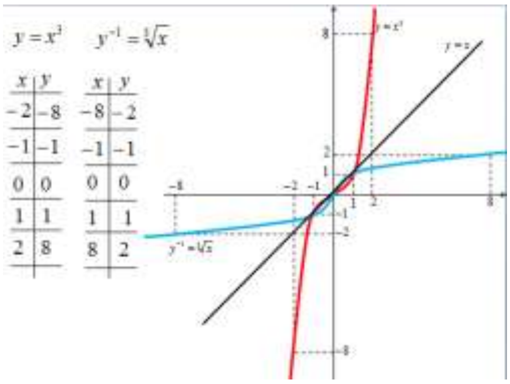
$y = x^2 - \textit{квадратичная функция}$ $\qquad$ $y = x^2 \,(x \ge 0) - \textit{квадратичная функция}$

Пример: $\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \Bigg| x_1 \ne x_2; \begin{matrix} y_1(-3) = 9 \\ y_2(3) = 9 \end{matrix} \Bigg| y_1 = y_2$ $\qquad$ $\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{matrix} \Bigg| x_1 \ne x_2; \begin{matrix} y_1(3) = 9 \\ y_2(4) = 16 \end{matrix} \Bigg| y_1 \ne y_2$

$(x_1 \ne x_2; y_1 = y_2) \Rightarrow y = x^2 - \textit{необратимая функция}$ $\quad$ $(x_1 \ne x_2; y_1 \ne y_2) \Rightarrow y = x^2 \,(x \ge 0) - \textit{обратимая функция}$

- **Обратные**. Для обратимой функции определяется обратная функция $y^{-1}(x)$. Пример: Найти обратную функцию для функции $y = x^3$.

Этапы	Решение
1. Перенесем *x* в левую часть равенства, а *y* - в правую. Получаем уравнение.	$y = x^3; x^3 = y$
2. Решаем уравнение относительно переменной *x*.	$x^3 = y; \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y}; x = \sqrt[3]{y}$
3. Производим замену $x \to y^{-1}; y \to x$	$x = \sqrt[3]{y}; y^{-1} = \sqrt[3]{x} - \textit{обратимая функция}$



Построим графики функций $y = x^3$ и $y^{-1} = \sqrt[3]{x}$ в одной координатной плоскости.

Графики функций $y = x^3$ и $y^{-1} = \sqrt[3]{x}$ симметричны относительно прямой *y*=*x*. **Вывод:** графики взаимнообратных функций симметричны относительно прямой *y*=*x*.

- **Сложные.** Если $y = f(z)$, а $y = \varphi(x)$, то функция $y = f(\varphi(x))$.

Пример: $y = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$ -сложная функция, которую можно разложить по функциям:

$y = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

$1) y_1 = x^2$

$2) y_2 = y_1 - 4 = x^2 - 4$

$3) y_3 = tgy_2 = tg(x^2 - 4)$

$4) y_4 = 2^{y_3} = 2^{tg(x^2-4)}$

$5) y_5 = \sqrt{y_4} = \sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

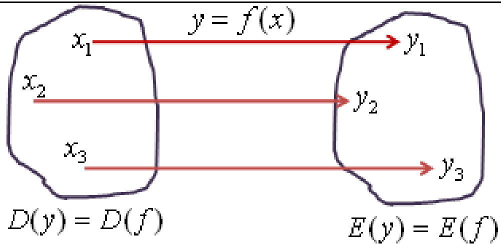
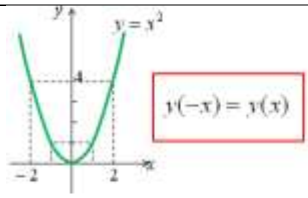
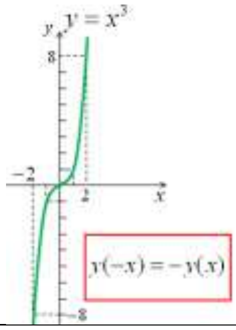
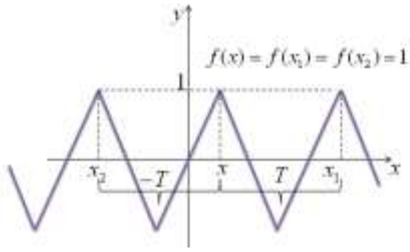
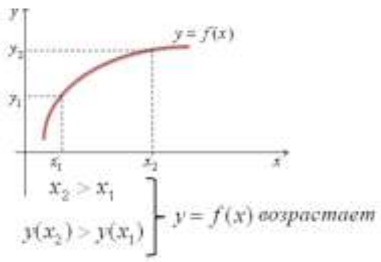
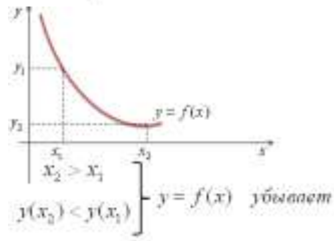
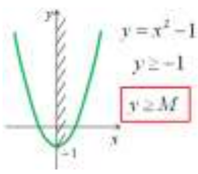
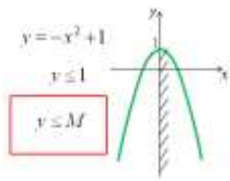
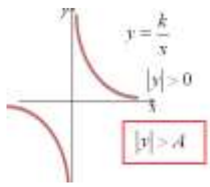
$6) y = \cos y_5 = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

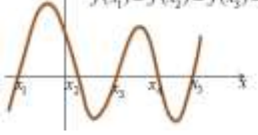
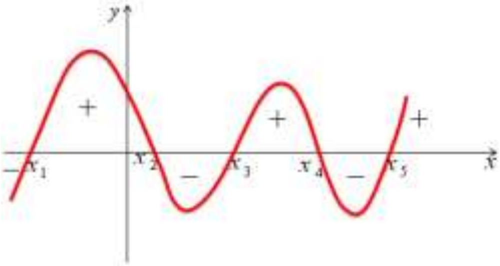
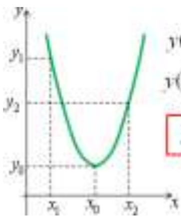
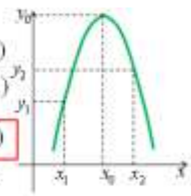
3. Способы задания табличный – таблицей; аналитический – формулами; графический - графиками; словесный – словами; полуграфический – смешанное задание.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссами которых являются значения аргументов, а ординатами – соответствующие значения функции.

Утверждение: Для того, чтобы линия была графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы всякая прямая параллельная оси ординат пересекала ее в одной точке.

4. Свойства функций.

№	свойства	определение	Математическая запись
1	Область определения Область значений	Совокупность всех независимых переменных $D(y) = D(f)$ Совокупность всех зависимых переменных $E(y) = E(f)$	
2	Четность, нечетность	Функция называется ***четной***, если противоположным значениям аргументов соответствует одно и то же значение функции. ***Признак:*** графики четных функций симметричны относительно оси ординат. Функция называется ***нечетной***, если противоположным значениям аргументов соответствуют противоположные значения функции. ***Признак:*** графики нечетных функций симметричны относительно начало координат.	
3	Периодичность	Функцию называют ***периодической*** с период T не равным нулю, если для любых аргументов из области определения функции значения этой функции в точках $x; x+T; x-T$ равны.	
4	Возрастание и убывание	Функцию называют ***возрастающей*** (***убывающей***) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргументов увеличиваются (уменьшаются) значения функции. Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает называются интервалами ***монотонности***.	
5	Ограниченность	Функцию называют ***ограниченной снизу (сверху)*** на множестве X, если существует такое число M, что на этом множестве значения функции превосходят (не превосходят) данное число M Функцию называют ***неограниченной*** на множестве X, если для любого числа M найдется такой аргумент данной функции, что значение функции в этом аргументе по модулю строго больше этого числа M.	

6	Нули функции	Это значения аргументов, в которых значения функции обращаются в нуль. ***Признак:*** график функции пересекает ось абсцисс.	$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=f(x_5)=0$ 
7	Знакопостоянство	Нули функции разбивают область определения на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак.	 $y>0 \quad x\in(x_1;x_2)\cup(x_3;x_4)\cup(x_5;\infty)$ $y<0 \quad x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;x_3)\cup(x_4;x_5)$
8	Точки экстремума (максимум и минимум)	Точка x_0 называется точкой ***минимума*** функции, если для всех x взятых из некоторой окрестности точки x_0, значения функции в этих точках больше или равно значений функции в точке x_0. Точка x_0 называется точкой ***максимума*** функции, если для всех x взятых из некоторой окрестности точки x_0, значения функции в этих точках меньше или равно значений функции в точке x_0.	 $y(x_1)>y(x_0)$ $y(x_2)>y(x_0)$ $\boxed{y(x)\geq y(x_0)}$ $x_0-\min$ $y(x_1)<y(x_0)$ $y(x_2)<y(x_0)$ $\boxed{y(x)\leq y(x_0)}$ $x_0-\max$ 
9	Непрерывность		
10	Асимптоты		