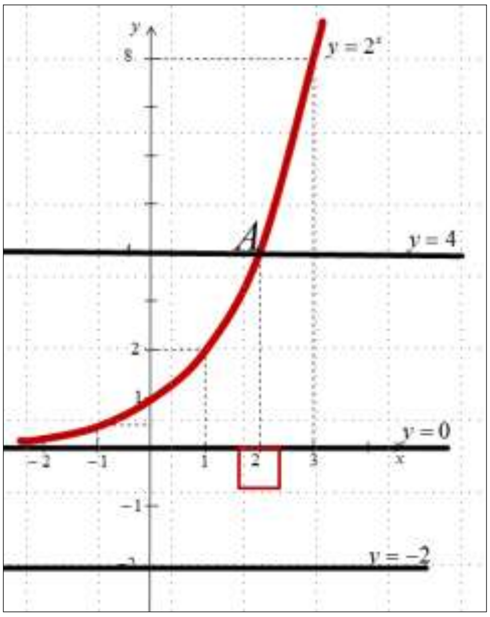
Показательные уравнения.

1. Определение**:** ***Уравнение вида*** $a^x = b$ ***, где*** $0 < a \neq 1$ ***называется показательным уравнением.***

Так как область значения показательных функций – множество положительных чисел, следовательно, показательные уравнения могут иметь:

<table>
<tr>
<td rowspan="3">
</td>
<td>не имеет решения, если $b < 0$</td>
<td>$2^x \neq -2$
$т.к.\ E(a^x) = R_+$</td>
</tr>
<tr>
<td>не имеет решения, если $b = 0$</td>
<td>$2^x \neq 0$
$т.к.\ E(a^x) = R_+$</td>
</tr>
<tr>
<td>одно решение, если $b > 0$</td>
<td>$2^x = 4$
$2^x = 2^2$
$x = 2$</td>
</tr>
</table>

При решении показательных уравнений используют свойства степеней и корней

Математическая запись	Словесная формулировка
$a^0 = 1$	Любое число в нулевой степени равна единице
$a^1 = a$	Любое число в первой степени равно самому числу
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.
$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя делимого вычитаем показатель делителя.
$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	При возведении степень в степень основание остается прежним, а показатели перемножаются.
$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	При возведении произведения в степень каждый множитель возводится в эту степень и полученные результаты перемножаются.
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	При возведении дробь в степень, и числитель, и знаменатель дроби возводится в эту степень.
$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	При умножении корней с одинаковыми степенями, степень корня остается без изменения, а подкоренные выражения перемножаются
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	При извлечении корня из дроби извлекается корень из числителя и из знаменателя.
$\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}} = \sqrt[pnm]{a}$	При извлечении корня из корня подкоренное выражение остается без изменения, а показатели степеней корней перемножаются.
$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$	Если показатель корня и показатель степени кратны одному и тому же числу, то можно показатель корня и показатель степени поделить на это число.

2. Способы решения показательных уравнений.

Вид уравнения	Метод решения	Этапы решения
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(0 < a \neq 1)$	Представление обеих частей уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями, используя свойства степеней и корней.	$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $f(x) = g(x)$
$a^{f(x)} = b^{f(x)}$ $(0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1; a \neq b)$	Представление обеих частей уравнения в виде степеней с одинаковыми показателями.	$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Big\vert : b^{f(x)}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$ $f(x) = 0$
$a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $(0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1; a \neq b)$	Логарифмирование обеих частей уравнения по некоторому основанию	$a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $\log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)}$ $f(x) \cdot \log_a a = g(x) \cdot \log_a b$ $f(x) = g(x) \cdot \log_a b$
$a^{f(x)-n} \pm a^{f(x)} = b$	Разложение на множители и вынесение общего множителя за скобки	$a^{f(x)\pm n} \pm a^{f(x)} = b$ $a^{f(x)} \cdot a^{\pm n} \pm a^{f(x)} = b$ $a^{f(x)}\left(a^{\pm n} \pm 1\right) = b$ $a^{f(x)} = \frac{b}{a^{\pm n} \pm 1}$
$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$	Замена переменой, решение квадратного уравнения относительно новой переменой	$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$ $m = a^{f(x)}$ $A \cdot m^2 + B \cdot m + C = 0$
$Au^{2f(x)} + Bu^{f(x)}v^{f(x)} + Cv^{2f(x)} = 0$	Однородные показательные уравнения	Деление уравнения на одну из наивысших степеней и замена переменной. $Au^{2f(x)} + Bu^{f(x)}v^{f(x)} + Cv^{2f(x)} = 0 \Big\vert : v^{2f(x)}$ $A\left(\frac{u}{v}\right)^{2f(x)} + B\left(\frac{u}{v}\right)^{f(x)} + C = 0$ $m = \left(\frac{u}{v}\right)^{f(x)}$ $Am^2 + Bm + C = 0$
$x^{f(\log_a x)} = a^c$	Логарифмирование обеих частей уравнения по некоторому основанию	$x^{f(\log_a x)} = a^c$ $\log_a x^{f(\log_a x)} = \log_a a^c$ $f(\log_a x)\log_a x = c\log_a a$ $f(\log_a x)\log_a x = c$