

Раздел: Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление – это нахождение производной или дифференциала заданной функции.

Тема: Понятие производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

задача	математическая запись	Словесная интерпретация
Задача о мгновенной скорости (прямолинейное движение материальной точки)	$v_{cp.}(t_0) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Мгновенная скорость неравномерного прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени есть производная от пути за этот промежуток времени
	$v_{мг.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{cp.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$	
Задача о мгновенной величине тока (протекание тока в электрической цепи)	$I_{cp.}(t_0) = \frac{q(t) - q(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	Мгновенное значение тока в электрической цепи при неравномерном движении через проводник есть производная от количества зарядов, прошедших за определенный промежуток времени.
	$I_{мг.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} I_{cp.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{q(t) - q(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t_0)$	
Задача о производительности труда	$z_{cp.}(t_0) = \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$	Мгновенное значение производительности труда при неравномерном выпуске произведенной продукции есть производная от количества произведенной продукции за определенный промежуток времени.
	$z_{мг.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} z_{cp.}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$	

2. Общее правило нахождения производной.

1). Находим приращение аргумента: $\Delta x = x - x_0$.

2) Находим приращение функции: $\Delta y = y(x) - y(x_0)$

3) Находим среднее значение функции в точке x_0 : $y_{cp.}(x_0) = \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4) Находим мгновенное значение функции: $y_{мг.} = \lim_{x \rightarrow x_0} y_{cp.}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$

3. Определение производной функции

Словесная формулировка	Математическая формулировка
Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$, если этот предел существует.	$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4. Таблица производных

Название формулы	формула
Производная постоянной величины	$C' = 0$

Производная аргумента	$x' = 1$
Производная алгебраической функции	$(u \pm v)' = u' + v'$
Производная произведения	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
Частный случай произведения функций	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
Производная частного двух функций	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
Производная сложной функции	$(u(y(x)))' = u' \cdot y'$
Производная обратной функции	$(u^{-1})' = \frac{1}{u'}$
Производная степенной функции	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
Производная функции квадратного корня	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Производная обратной пропорциональности	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Производная показательной функции	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
Частный случай показательной функции	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
Производная логарифмической функции	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
Частный случай логарифмической функции	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Производная синуса	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
Производная косинуса	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
Производная тангенса	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
Производная котангенса	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
Производная арксинуса	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Производная арккосинуса	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Производная арктангенса	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
Производная арккотангенса	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
Производная линейной функции	$(kx + b)' = k$

Физический, механический смысл производной

1. Физический и механический смысл производной.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в этой точке, т.е. скорость процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$.

Если $s = s(t)$ - закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ - скорость движения в момент времени t . Тогда скорость изменения скорости этого движения - есть ускорение в этот момент времени.

$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения тела в данный момент времени равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента времени.*

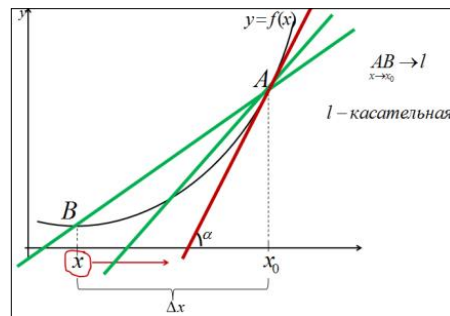
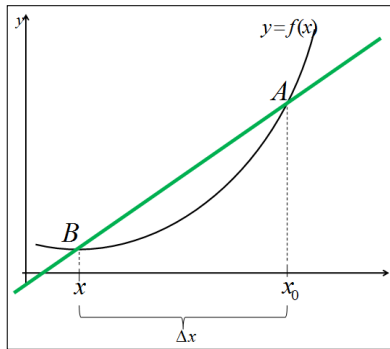
2. Приложения производной к решению физических задач.

Распад радиоактивного вещества: m – масса радиоактивного вещества t – время распада радиоактивного вещества v – скорость распада	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dm}{dt} = m'(t) = v(t)$
Выполнение работы: A – совершаемая работа t – затраченное время W - произведенная мощность	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dA}{dt} = A'(t) = W(t)$
Воздействие внешнего давления на жидкость: V – объем жидкости P – внешнее давление k – коэффициент сжатия жидкости	$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{dV}{dP} = V'(P) = k$
Вращение твердого тела вокруг оси: φ - угол поворота t – момент времени ω - угловая скорость	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t) = \omega(t)$
Передача количества тепла: Q – количество теплоты T – температура C - теплоемкость	$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{dQ}{dT} = Q'(T) = C(T)$
Протекание тока через проводник: q – положительный электрический заряд t – момент времени I – сила тока	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dq}{dt} = q'(t) = I(t)$
Линейная плотность стержня: m – масса стержня x – длина участка стержня ρ – плотность стержня	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dm}{dx} = m'(x) = \rho(x)$

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.

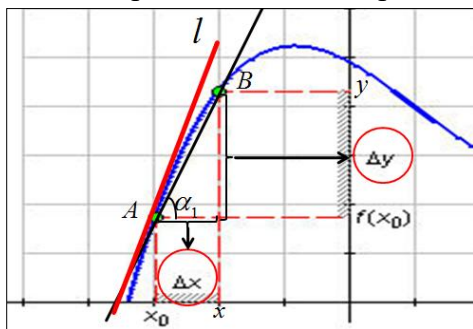
1. Что такое касательная?

Прямая АВ называется *секущей* – это прямая, пересекающая кривую в двух точках.



Определение: касательная к кривой в точка A называется прямая l , которая является предельным положением секущей AB , когда точка B , перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A .

2. Геометрический смысл производной



секущая AB имеет угловой коэффициент $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \quad AB \rightarrow l \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \alpha_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$$

Угловой коэффициент

касательной определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.

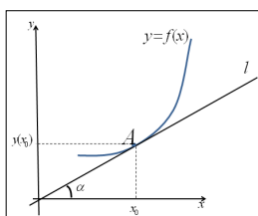
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Определение: Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику в той же точке равно тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.

3. Расположение касательной

Значение производной в точке	Угловой коэффициент касательной	Тангенс наклона касательной	Значение угла	Расположение касательной
$y'(x_0) = 0$	$k = 0$	$\operatorname{tg} \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$l \parallel O_x$
$y'(x_0) > 0$	$k > 0$	$\operatorname{tg} \alpha > 0$	$0 < \alpha < 90^\circ$	с осью O_x образует острый угол
$y'(x_0) < 0$	$k < 0$	$\operatorname{tg} \alpha < 0$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	с осью O_x образует тупой угол
$y'(x_0) = \infty$	$k = \infty$	$\operatorname{tg} \alpha = \infty$	$\alpha = 90^\circ$	$l \perp O_x$

4. Уравнение касательной



Уравнение прямой l : $y = kx + b$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) \quad b = y(x_0)$$

$$y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0) \text{ - уравнение касательной}$$

5. Взаимное расположение двух прямых: $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ и $l_2: y_2 = k_2x + b_2$

- если $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow k_1 = k_2$

- если $l_1 \perp l_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

- если $l_1 \cap l_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 \cdot k_2 + 1} \right|$

Дифференциал функции

1. Понятие дифференциала функции

Дано:			
$y = f(x)$	1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$	2) $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$	3) $f'(x_0)\Delta x$ – составляет
$x \in (a; b)$		$\Delta x \rightarrow 0; \alpha$ – бесконечно малое	главную часть приращения
$x_0 \in (a; b)$	$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$	$\alpha\Delta x \rightarrow$ бесконечно малое	функции $f(x)$ в точке x_0
		высокого порядка	

Определение: Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется линейная относительно величина $f'(x_0)\Delta x$, составляет главную часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0 .

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x$$

Дано:	1) $dy = y'\Delta x$	2) $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$
$y = x$	$y' = (x)' = 1$	дифференциал dx независимого переменного x совпадает с его приращением Δx , т.е. $dx = \Delta x$
	$dy = ?$	

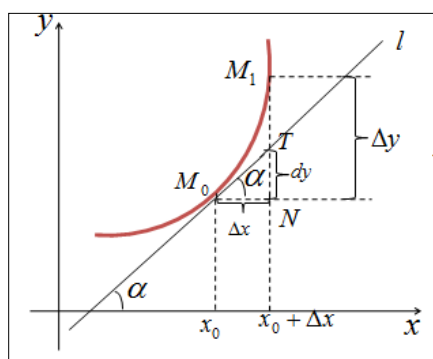
$dy = y' \cdot dx$	Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал ее аргумента
$y' = \frac{dy}{dx}$	Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента

Примеры:

1) Дано:	$dy = y' \cdot dx$
$y = \cos(1 - x^2)$	$y' = (\cos(1 - x^2))' = u = 1 - x^2 = (\cos u)' = -u' \cdot \sin u = -(1 - x^2)' \cdot \sin(1 - x^2) = 2x \cdot \sin(1 - x^2)$
$dy = ?$	Ответ: $dy = 2x \cdot \sin(1 - x^2) dx$

2) Дано:	$dy = y' \cdot dx$
$y = x^3 \cdot e^{x^2}$	$y' = (x^3 \cdot e^{x^2})' = u = x^3; v = e^{x^2} = (uv)' = u'v + v'u = (x^3)' \cdot e^{x^2} + (e^{x^2})' \cdot x^3 = 3x^2 e^{x^2} + x^3 e^{x^2} \cdot 2x;$
$dy = ?$	Ответ: $dy = x^2 e^{x^2} (3 + 2x) dx$

2. Геометрический смысл дифференциала.



M_0T – касательная; $\square M_0NT$ – прямоугольный

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NT}{M_0N}; NT = M_0N \cdot \operatorname{tg} \alpha; M_0N = \Delta x; \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$$NT = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(x_0; f(x_0))$, соответствующему приращению ее абсциссы x_0 на Δx .

3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$$

Примеры:

$$1) \sqrt{85} = \sqrt{81+4} \approx \frac{1 \cdot 4}{2\sqrt{81}} + \sqrt{81} = \frac{2}{9} + 9 = 9\frac{2}{9}$$

$$x_0 = 81; \Delta x = 4$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) \sqrt{33} = \sqrt{36-3} \approx \frac{1 \cdot (-3)}{2\sqrt{36}} + \sqrt{36} = -\frac{3}{2 \cdot 6} + 6 = 5,5$$

$$x_0 = 36; \Delta x = -3$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) (2,3)^{-5} = (2+0,3)^{-5} \approx -\frac{5}{2^6} \cdot 0,3 + 2^{-5} = -\frac{5 \cdot 3}{64 \cdot 10} + \frac{1}{2^5} = -\frac{3}{64 \cdot 2} + \frac{1}{32} = \frac{-3+4}{128} = \frac{1}{128}$$

$$x_0 = 2; \Delta x = 0,3$$

$$(x^{-5})' = -5 \cdot x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

$$4) \frac{1}{0,81} = \frac{1}{1-0,19} \approx -\frac{1}{1^2} \cdot (-0,19) + \frac{1}{1} = 0,19 + 1 = 1,91$$

$$x_0 = 1; \Delta x = -0,19$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{27-7} \approx \frac{1 \cdot (-7)}{3(\sqrt[3]{27})^2} + \sqrt[3]{27} = -\frac{7}{3 \cdot 9} + 3 = 3 - \frac{7}{27} = 2\frac{20}{27}$$

$$x_0 = 27; \Delta x = -7$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$6) (1,2)^5 - 2 \cdot (1,2)^{-6} + 3 \cdot (1,2)^{\frac{1}{4}} = (1+0,2)^5 - 2 \cdot (1+0,2)^{-6} + 3 \cdot (1+0,2)^{\frac{1}{4}} \approx 5 \cdot 1^4 \cdot 0,2 + \frac{12 \cdot 0,2}{1^7} + \frac{3 \cdot 0,2}{4(\sqrt[4]{1})^3} =$$

$$= 5 \cdot 0,2 + \frac{12}{5} + \frac{3}{4 \cdot 5} = 1 + 5,5 + 0,15 = 6,65$$

$$x_0 = 1; \Delta x = 0,2$$

$$\left(x^5 - 2 \cdot x^{-6} + 3 \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)' = 5x^4 + 2 \cdot 6x^{-7} + 3 \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = 5x^4 + \frac{12}{x^7} + \frac{3}{4(\sqrt[4]{x})^3}$$