Функции. Способы задания функций. Виды функций.

1. Определение: Функцией называется зависимость величины y от величины x, если каждому рассматриваемому значению величины x соответствует определенное значение величины y.

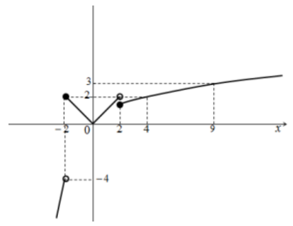
$y = f(x)$, где x – независимая переменная (аргумент); y – зависимая переменная (значение функции).

2. Виды функций

- **Целые** функции $y = P(x)$, где $P(x)$ – многочлен. Пример: $y = kx + b; y = ax^2 + bx + c; y = \sqrt{x}$;

- **Дробно-рациональные** функции $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Пример: $y = \dfrac{k}{x}$;

-**Кусочные**. Функция, которая задается формулами, действующими на различных участках изменения аргумента. Пример: $y = \begin{cases} -x^2; x < -2 \\ |x|; -2 \le x < 2 \\ \sqrt{x}; x \ge 2 \end{cases}$. График (см. рисунок)



- **Обратимые**. Функция называется обратимой, если разным значениям аргументов из области определения функции отвечают разные значения функции. Условие обратимости $(x_1 \ne x_2) \Rightarrow (y_1 \ne y_2)$.

$y = x^2$ – *квадратичная функция*

Пример: $\left.\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{matrix}\right| x_1 \ne x_2; \left.\begin{matrix} y_1(-3) = 9 \\ y_2(3) = 9 \end{matrix}\right| y_1 = y_2$

$y = x^2\,(x \ge 0)$ – *квадратичная функция*

$\left.\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{matrix}\right| x_1 \ne x_2; \left.\begin{matrix} y_1(3) = 9 \\ y_2(4) = 16 \end{matrix}\right| y_1 \ne y_2$

$(x_1 \ne x_2; y_1 = y_2) \Rightarrow y = x^2$ – *необратимая функция* $(x_1 \ne x_2; y_1 \ne y_2) \Rightarrow y = x^2\,(x \ge 0)$ – *обратимая функция*

- **Обратные**. Для обратимой функции определяется обратная функция $y^{-1}(x)$. Пример: Найти обратную функцию для функции $y = x^3$.

Этапы	Решение
1. Перенесем x в левую часть равенства, а y - в правую. Получаем уравнение.	$y = x^3; x^3 = y$
2. Решаем уравнение относительно переменной x.	$x^3 = y; \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y}; x = \sqrt[3]{y}$
3. Производим замену $x \to y^{-1}; y \to x$	$x = \sqrt[3]{y}; y^{-1} = \sqrt[3]{x}$ – *обратимая функция*

Построим графики функций $y = x^3$ и $y^{-1} = \sqrt[3]{x}$ в одной координатной плоскости.

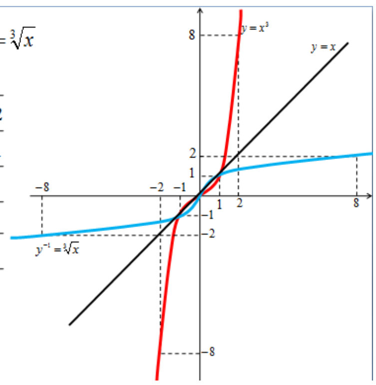
Графики функций $y = x^3$ и $y^{-1} = \sqrt[3]{x}$ симметричны относительно прямой $y=x$. **Вывод:** графики взаимнообратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

$y = x^3$

x	y
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

$y^{-1} = \sqrt[3]{x}$

x	y
−8	−2
−1	−1
0	0
1	1
8	2



- **Сложные.** Если $y = f(z)$, а $y = \varphi(x)$, то функция $y = f(\varphi(x))$.

Пример: $y = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$ -сложная функция, которую можно разложить по функциям:

$y = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

1) $y_1 = x^2$

2) $y_2 = y_1 - 4 = x^2 - 4$

3) $y_3 = tg y_2 = tg(x^2 - 4)$

4) $y_4 = 2^{y_3} = 2^{tg(x^2-4)}$

5) $y_5 = \sqrt{y_4} = \sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

6) $y = \cos y_5 = \cos\sqrt{2^{tg(x^2-4)}}$

3. Способы задания табличный – таблицей; аналитический – формулами; графический - графиками; словесный – словами; полуграфический – смешанное задание.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссами которых являются значения аргументов, а ординатами – соответствующие значения функции.

Утверждение: Для того, чтобы линия была графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы всякая прямая параллельная оси ординат пересекала ее в одной точке.