1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1 Содержание математических моделей и методика их построения.

Содержанием любой математической модели является выраженная в математических соотношениях любая (экономическая) сущность условий задачи и поставленной цели. Математические модели включают в себя систему ограничений, целевую функцию.

Система ограничений состоит из отдельных математических уравнений или неравенств, называемых балансовыми уравнениями или неравенствами. Целевая функция связывает между собой различные величины модели. В качестве цели выбирается следующие показатели: прибыль, рентабельность, себестоимость, валовая продукция и т.д. Поэтому целевую функцию иногда называют критериальной. Целевая функция – функция многих переменных величин и может иметь свободный член.

Решением математической модели, или допустимым планом называется набор значений неизвестных, который удовлетворяет ее системе ограничений. Модель имеет множество решений, или множество допустимых планов, и среди них нужно найти единственное, удовлетворяющее системе ограничений и целевой функции. Допустимый план, удовлетворяющий целевой функции, называется оптимальным. Среди допустимых планов, удовлетворяющих целевой функции, как правило, имеется единственный план, для которого целевая функция и критерий оптимальности имеют максимальное или минимальное значение. Если модель имеет множество оптимальных планов, то для каждого из них значение целевой функции одинаково.

Если математическая модель задачи линейна, то оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений. В случае нелинейной модели оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции может быть несколько. Поэтому необходимо определять экстремальные планы и экстремальные значения целевой функции. План, для которого целевая функция модели имеет экстремальное значение, называется экстремальным планом, или экстремальным решением.

Целевая функция, зависящая от переменных величин в заданной области изменения последних, всегда достигает наибольшего и наименьшего значения или вовсе его не имеет. Экстремальные значения целевой функции достигаются внутри, а оптимальные значения достигаются также на границе области изменения переменных. Поэтому экстремальные значения целевой функции могут совпадать с оптимальными, однако это не значит, что все оптимальные значения целевой функции есть экстремальные.

Для принятия оптимального решения любой задачи необходимо построить ее математическую модель, включающую в себя:
- систему ограничений;
- целевую функцию;
- критерия оптимальности;
- решение.

Методика построения математической модели состоит в том, чтобы экономическую сущность задачи представить математически, используя различные символы, переменные и постоянные величины, индексы и другие обозначения.

Все условия задачи необходимо записать в виде уравнений или неравенств. Поэтому, в первую очередь необходимо определить систему переменных величин, которые могут для конкретной задачи обозначить искомый объем производства продукции на предприятии, количество перевозимого груза поставщиками конкретными потребителями и т.д. Как правило, для обозначения переменных величин используются буквы: *x, y, z,* а также их модификации. Например, модификация переменной x: $\bar{x}; x; x_1; x_{ij}; x_{isj}$ и т.д.

Переменные $x_1, x_2 \ldots x_n$ могут обозначать объем производства продукции соответственно первого, второго и так далее n-вида. Переменные x_{isj} могут обозначать объемы производства *i*-го вида изготовленной на *s*-м оборудовании *j*-м технологическим способом. Для индексации используют латинские буквы*: i,j,s,l* количество переменных может обозначаться буквами *n,k,m* . По каждой переменной для конкретной задачи дается словесное пояснение.

Целевую функцию – цель задачи – обозначается буквами *f,F,Z*. Постоянные величины обозначают буквами:*a,b,c,d*.

Ограничения модели должны отражать все условия, формулирующие оптимальный план. Итак, в упрощенном виде математическая модель представляет собой:

1. Систему ограничений – равенства, неравенства вида больше или равно, меньше или равно;
2. Условия не отрицательности переменных, исходя из экономической или физической сущности переменный $\left(x_j \geq 0;\ j=\overline{1,n}\right)$.
3. Целевую функцию.

Математически общую модель задачи можно представить в виде:

1. Найти значения n переменных $x_1, x_2 .... x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений $f_i(x_1, x_2 .... x_n)\{\leq, =, \geq\} b_i \left(i=\overline{1,m}\right)$.
2. Максимизировать или минимизировать целевую функцию $Z = f(x_1, x_2 .... x_n)$

Линейное программирование – математический метод отыскания максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

Пусть предприятие обладает *i* видами производственных ресурсов $(i=1,2,....,m)$, объем каждого из которых обозначим через b_i , имеющиеся на предприятии ресурсы используются для производства *j* видов продукции $(j=1,2,....,n)$, причем известно количество *i* -го вида ресурсов, затрачиваемое на выпуск единицы *j* -го вида продукции, которое обозначим через a_{ij}. Кроме того, известна прибыль от реализации единицы каждого из *j* видов выпущенной продукции, которую обозначим через c_j .

С учетом введенных обозначений математическая модель задачи формирования производственного плана, обеспечивающего получение максимальной прибыли, может быть представлена следующим образом: *найти план выпуска продукции* $\overline{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n\right)$

В общем виде постановка задачи линейного программирования заключается в следующем:

1. Условие задачи представляются с помощью ***системы линейных неравенств, выражающих ограничений, налагаемые на использование имеющихся ресурсов***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ ....; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}, \qquad (1)$$

где $a_{11} -$ количество единиц ресурсов вида 1 на первом предприятии; $a_{12} -$ количество единиц ресурсов вида 1 на втором предприятии; $b_1 -$ общий ресурс ресурсов вида 1 (для всех предприятий); $x_1, x_2.....x_n -$ искомое количество предприятий типов 1, 2 и т.д.

Вторая строка системы неравенств содержит аналогичные величины для ресурсов вида 2 и т.п.

2. ***Целевая функция (линейная функция)*** задается в виде $Z\left(\overline{X}\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$, (2)

где $c_1; c_2 .... c_n$ - постоянные коэффициенты (показатели, характеризующие издержки предприятий).

В краткой записи задача линейного программирования имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i; i=\overline{1,m} \quad (3)$$

$$x_j \ge 0;\ j=\overline{1,n} \quad (4)$$

$$Z\left(\overline{X}\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (5)$$

1.2. Построение математических моделей задач линейного программирования

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответа на следующие вопросы:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать ***переменные*** данной задача?
2. Какие ***ограничения*** должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?
3. В чем состоит ***цель задачи***, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примерах.

1. Задача об оптимальном использовании ресурсов

Предприятие может выпускать n видов продукции, используя для этого m видов ресурсов. Известны затраты каждого вида ресурса на производство единицы каждого вида продукции и прибыль от реализации единицы каждого вида продукции.

Требуется составить план выпуска продукции так, что бы при данных запасах ресурсов получить максимальную прибыль.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначения:

$b_i; i=\overline{1,m}$ - запасы i-го вида ресурса;

$a_{ij}; i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$ - затраты i-го вида ресурса на производство единицы j-го вида продукции;

$c_j; j=\overline{1,n}$ -прибыль от реализации единицы j-го вида продукции.

Данные задачи можно представить в виде таблицы:

Виды ресурсов	Виды продукции				Запасы ресурсов
	1	2	….	n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
….					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Прибыль от реализации единицы продукции	c_1	c_2		c_n	

Обозначим через x_j планируемый выпуск j-го вида продукции. Тогда система ограничений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ....; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$. Целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$. План выпуска продукции $\overline{x} = (x_1; x_2; .....x_n)$.

2. *Задача на оптимальный раскрой материала.*

Имеются прутки одинаковой длины, из которых нужно нарезать определенное количество заготовок заданной длины. Прутки можно нарезать на заготовки в различных сочетаниях. При каждом варианте нарезания прутков остаются концевые отрезки.

Требуется определить, какое количество прутков следует разрезать по каждому варианту, чтобы получить заданное количество заготовок различной длины и чтобы общая длина концевых отрезков была минимальной.

Составим математическую модель данной задачи. Введем обозначение:

i -номер вида заготовки, $i = \overline{1, m}$;

$j -$ номер варианта раскроя прутка, $j = \overline{1, n}$;

$a_{ij} -$ количество заготовок i-го вида, получаемых из одного прутка, разрезаемого по j-му варианту;

b_i - требуемое число заготовок i-го вида;

$c_j -$ длина концевого отрезка, оставшегося от одного прутка при разрезании прутка по j-му варианту.

Данные задачи можно представить в виде таблицы.

Виды заготовок	Варианты раскроя				План заготовок
	1	2	….	n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
….					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Длина концевого отрезка	c_1	c_2		c_n	

Обозначим через x_j - число прутков, разрезаемых по j-му варианту. Тогда система ограничений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ....; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$. Целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$. План раскроя прутков: $\overline{x} = (x_1; x_2; .....x_n)$.

3. *Задача об использовании мощностей (загрузки оборудования)*

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1; n_2; .....n_k$ единиц продукции $P_1; P_2; .....P_k$. Продукция производится на станках

$S_1; S_2; \dots S_m$, для каждого из которых известны производительность a_{ij} (т.е. число единиц продукции P_j , которое можно произвести на станке S_i за единицу времени) и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить план работы станков (т.е. распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Обозначим $x_{ij} -$ время, в течение которого станок $S_i; i = \overline{1, m}$ будет занят изготовлением продукции $P_j; j = \overline{1, k}$. Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T, то справедливо систему неравенств: $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1k} \le T; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2k} \le T; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mk} \le T; \end{cases}$

Для выполнения плана выпуска номенклатуры. Необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} = n_1; \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} = n_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \dots + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases}$$

Затраты на производство всей продукции должны быть минимальными:

$$Z\left(\overline{X}\right) = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots + b_{mk}x_{mk} \to \min$$

4. *Задача о диете*

В продаже имеются различные виды продуктов. Известны цены продуктов, содержание питательных веществ в единице каждого вида продукта, медицинские требования на содержание питательных веществ в суточной диете. Требуется определить, какие продукты и в каком количестве нужно включить в диету, чтобы она соответствовала всем медицинским требованиям и чтобы стоимость диеты была минимальной.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначение:

$a_{ij} -$ содержание i-го питательного вещества в единицу j-го продукта;

$b_i -$ минимальное содержание i-го питательного вещества в суточной диете;

$c_j -$ цена единицы j-го продукта.

Данные задачи можно представить в виде таблицы:

Виды питательных веществ	Виды продуктов				Медицинское требование к диете
	1	2	….	n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
….					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Длина концевого отрезка	c_1	c_2		c_n	

Обозначим через x_j - единиц j-го продукта включается в суточную диету. Тогда система ограничений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ ....; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$. Целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n$.

Таким образом, математической моделью данной задачи является задача линейного программирования.

Пример 1. Коммерческому отделу поручили проанализировать совместную деятельность подразделений фабрики по изготовлению и продаже двух видов краски для внутренних (В) и наружных (Н) работ, которая поступает в продажу по цене 3 тыч. руб и 2 тыс. руб за 1 т. для производства красок используют два вида сырья А и В, максимально возможные суточные запасы которые составляют 3т и 4т. Расходы сырья на производство 1т красок приведены в таблице 1.

Таблица 1

Сырье	Расход сырья на 1 т краски, т		Запасы сырья, т
	наружных работ, Н	внутренних работ, В	
А	0,5	1	3
В	1	0,5	4
Цена 1 т, тыс. руб.	2	3	

Изучение конъюнктуры спроса на рынке сбыта показало, что суточный спрос на краску для внутренних работ никогда не превышал спроса на краску для наружных работ более чем на 1,5 т, а спрос на краску для внутренних работ никогда не превышал 2 т в сутки. Какое количество краски каждого вида необходимо производить, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Кроме того, известно, что план должен предусмотреть обязательный выпуск красок, производство которых не опускалось ниже 0,25 т для красок для наружных работ и ниже 0,5 т – для красок для внутренних работ.

Поскольку в задании необходимо определить объемы производства для продажи краски, то суточные объемы производства красок для наружных и внутренних работ обозначим $x_н$ и $x_в$ тонн соответственно.

Критерием, по которому определяется степень достижения поставленной цели, является доход от продажи краски, который должен быть максимально возможным. На этом основании целевую функцию можно записать таким образом: $F(X) = (2x_н + 3x_в) \to max$.

Решение любой задачи осуществляется в рамках ограниченных ресурсов. В данном случае необходимо учесть ограничения на расход сырья, запасы которого на предприятии не бесконечны, а также ограничения на спрос краски. Математически эти ограничения можно записать следующим образом:

$0,5x_н + x_в \le 3$ – запасы сырья А,

$x_н + 0,5x_в \le 4$ – запасы сырья В,

$x_в - x_н \le 1,5$ – соотношение спроса на краски,

$x_в \le 2$ – максимальная величина спроса на краску В.

Объемы производства и соответственно продажи краски не могут принимать отрицательных значений. В связи с этим необходимо записать тривиальное условие неотрицательности переменных: $x_н \ge 0;\ x_в \ge 0$.

Таким образом, в целом математическую модель задачи можно представить в таком виде: определить суточные объемы производства красок – вектор $X = (x_н\ ,\ x_в)$, который при заданных условиях-ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в \le 3, \\ x_н + 0{,}5x_в \le 4, \\ x_в - x_н \le 1{,}5, \\ x_в \le 2, \\ x_н \ge 0{,}25, \\ x_в \ge 0{,}5. \end{cases}$$

обеспечивает максимальный доход от продажи краски в соответствии с целевой функцией $F(X) = (2x_н + 3x_в) \to max$.

Полученная модель является задачей линейного программирования, так как все входящие в нее функции линейны. Решение задачи такого класса возможно с использованием либо геометрического, либо алгебраического симплексного методов.