## 1.4. Симплексный метод

***Симплексный метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется и угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.***

Вычислительный процесс может быть представлен в виде следующей последовательности: итеративный переход от одного допустимого базисного решения проводится направленно от одной вершины области допустимых решении к другой; базисная переменная приравнивается к нулю и переходит в свободную, а соответственно свободная переменная переводится на место базисной:

- если в столбце свободных членов все элементы положительны, то решение является допустимым;
- если в строке целевой функции все элементы неотрицательны, то решение является оптимальным при решении задачи на максимум.

На первом шаге находят начальное опорное решение – допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям. Затем последовательно за определенное число итераций направленно осуществляется переход от одного опорного решения к другому вплоть до оптимального. Следует заметить, что на первом шаге в качестве базисных переменных следует выбрать такие $m$ переменные, каждая из которых входит только один раз в одно из $m$ уравнений системы, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных. При этом если выбранные переменные имеют те же знаки, что и соответствующие им свободные члены в правых частях, то полученное базисное решение будет допустимым. В процессе решения системы линейных уравнений необходимо ориентироваться на сохранение неотрицательности всех переменных, поскольку это определяет допустимость решения.

Алгоритм симплексного метода:

*<u>1. Составление первого опорного плана.</u>* Система ограничений задачи задана в виде системы неравенств смысла «$\le$», правые части которых $b_i \ge 0$. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i ; i = \overline{1,m}$, где $x_{n+i} ; i = \overline{1,m}$ - дополнительные переменные; $x_j ; j = \overline{1,m}$ - базисные переменные.

Решим эту систему относительно дополнительных переменных: $x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j ; (i = \overline{1,m})$, а функцию цели перепишем в виде уравнения: $F(X) = 0 - (-\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j)$.

Следует заметить, что опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Полагая, что основные переменные $x_1 = ..... = x_n = 0$, получим допустимое базисное решение – опорный план, $X_1 = (0;0;0;......0;b_1;b_2.....)$ а значение целевой функции $F(X_1) = 0$, который заносим в симплексную таблицу 2. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком.

Таблица 2

| план | Базисные переменные | Значения базисных переменных | Значения коэффициентов при | | | | $\Theta_i - \min$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | ……. | $x_n$ | |
| | | | | | | | |
| Индексная строка | | | | | | | |

*2. Проверка плана на оптимальность.* Если значение базисных переменных неотрицательны, то решение является допустимым. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны $(\geq 0)$, то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный и его необходимо улучшить.

*3. Определение ведущей строки.* Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы свободных членов симплексной таблицы делим на элементы того же знака $\left({}^{+}\!/_{+};{}^{-}\!/_{-}\right)$ ведущего столбца. Результаты заносим в отдельный столбец $\Theta_i$, которые должны быть всегда положительны. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению $\Theta_i$, является ведущей. Она и определяет переменную $x_i$, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной (обмен).

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют (квадратиком или кружочком).

*4. Построение нового опорного плана.* Переход к новому плану осуществятся в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т.е. вместо $x_i$ в базис войдет переменная $x_j$, соответствующая ведущему столбцу (замена).

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент, результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующей введенной в базис переменной $x_j$. В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице запишем 1, а в остальных клетках j столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$НЭ = СТЭ - \dfrac{A \cdot B}{РЭ}$, где СТЭ – элемент старого плана; РЭ – разрешающий элемент; А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ. Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма – проверке плана на оптимальность.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются отрицательные значения всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

Если в ведущем столбце все коэффициенты $a_{ij} \leq 0$, то функция цели $F(X)$ не ограничена на множестве допустимых планов, т.е. $F(X) \to \infty$ и задача не имеет решения.

Если в столбце $\Theta_i$ симплексной таблицы содержатся два или несколько одинаковых наименьших значений, то новый опорный план будет вырожденным (одна или нескольких базисных переменных станут равными нулю). Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. многократному повторению процесса вычислений , не позволяющему получить оптимальный план. В таких случаях для выбора ведущей строки используют метод Креко, который заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения $\Theta_i$, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

Например, таблица 3, содержащая три равных значения $\Theta_i = 2$, имеет вид:

Таблица 3

| план | Базисные переменные | Значения базисных переменных | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_4$ | 4 | 2 | 3 | 6 | 1 | 0 | 0 | 2 | 4/2 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_5$ | 8 | 4 | 8 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 8/4 |
| | $x_6$ | 10 | 5 | 12 | -1 | 1 | 0 | 1 | 8 | 10/5 |

Допустим, разрешающим столбцом является $x_7$, тогда разрешающим элементом может быть 2,4 или 5. следуя указанному правилу, получим таблицу 3:

Таблица 3

| Значения базисных переменных | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1,5 | 3 | 0,5 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 0,25 | 0 | 0,25 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2,4 | -0,2 | 0,5 | 0 | 0,2 | 1 |

Сравниваем последовательно слева направо полученные частные по столбцам. В первом и втором столбцах все частные одинаковы, а в третьем столбце наименьшее частное 1,5 в первой строке, следовательно, эта строка и будет разрешающей с разрешающим элементом 2.

Если в оптимальный план вошла дополнительная переменная $x_{n+1}$, то при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы *i*-го вида в количестве, полученном в столбце свободных членов симплексной таблицы.

Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, не вошедшей в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов. Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Рассмотрим применение симплексного метода на примере поставленной задачи в разделе 222 и уже полученного решения в разделе 222 геометрическим методом.

Для построения первого опорного плана систему неравенств преобразуем к системе уравнений путем введения дополнительных балансовых переменных $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , $x_4$ , определяющих объем неиспользованных ресурсов:

$$\begin{cases} 0{,}5x_н + x_в + x_1 = 3, \\ x_н + 0{,}5x_в + x_2 = 4, \\ -x_н + x_в + x_3 = 1{,}5, \\ x_в + x_4 = 2. \end{cases}$$

а целевую функцию представим в виде уравнения $F(X) = 0 - (-2x_н - 3x_в)$.

Полагая, что основные переменные $x_н = x_в = 0$, получим первый опорный план: $X_1 = (0; 0; 3; 4; 1{,}5; 2)$; $F(X_1) = 0$, в котором базисные переменные равны:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - (0{,}5x_н + x_в) = 3 \\ x_2 = 4 - (x_н + 0{,}5x_в) = 4 \\ x_3 = 1{,}5 - (x_в - x_н) = 1{,}5 \\ x_4 = 2 - x_в = 2 \end{cases}$$

Первый опорный план заносим в симплексную таблицу, он не является оптимальным, поскольку в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты (–2) и (–3).

Таблица 4

| **План** | **Базисные переменные** | **Значение базисных переменных** | $x_н$ | $x_в$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | **Q** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | **$x_1$** | 3 | 0,5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | **$x_2$** | 4 | 1 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| | **$x_3$** | 1,5 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1,5 |
| | **$x_4$** | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | **F ($X_1$)** | 0 | **-2** | **-3** | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| II | **$x_1$** | 1,5 | 1,5 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| | **$x_2$** | 3,25 | 1,5 | 0 | 0 | 1 | -0,5 | 0 | $\frac{13}{6}$ |
| | **$x_в$** | 1,5 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| | **$x_4$** | 0,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0,5 |
| | **F ($X_2$)** | 4,5 | **-5** | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | |
| III | **$x_1$** | 0,75 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,5 | -1,5 | 1,5 |
| | **$x_2$** | 2,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1,5 | 2,5 |
| | **$x_в$** | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | - |
| | **$x_н$** | 0,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | - |
| | **F ($X_3$)** | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | **-2** | 5 | |
| IV | **$x_3$** | 1,5 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -3 | - |
| | **$x_2$** | 1 | 0 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1,5 | $\frac{2}{3}$ |
| | **$x_в$** | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | **$x_н$** | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 | - |
| | **F ($X_4$)** | 10 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | **-1** | |
| V | **$x_3$** | 3,5 | 0 | 0 | -2 | 2 | 1 | 0 | |
| | **$x_4$** | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 1 | |
| | **$x_в$** | $1\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | |
| | **$x_н$** | $3\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 0 | 0 | |
| | **F ($X_4$)** | $10\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $2\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | |

Запишем оптимальный план: $X_5 = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}; 0; 0; 3,5; \frac{2}{3}\right) \quad F\left(X_5\right) = 10\frac{2}{3}$ тыс. руб.

Таким образом, для получения максимального дохода от дневной продажи краски $10\frac{2}{3}$ тыс. руб. предприятию необходимо выпускать в сутки $3\frac{1}{3}$ т краски наружных работ и $1\frac{1}{3}$ т краски для внутренних работ.