Симплексный метод

Симплексный метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется и угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.

Вычислительный процесс может быть представлен в виде следующей последовательности: итеративный переход от одного допустимого базисного решения проводится направленно от одной вершины области допустимых решении к другой; базисная переменная приравнивается к нулю и переходит в свободную, а соответственно свободная переменная переводится на место базисной:
- если в столбце свободных членов все элементы положительны, то решение является допустимым;
- если в строке целевой функции все элементы неотрицательны, то решение является оптимальным при решении задачи на максимум.

На первом шаге находят начальное опорное решение – допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям. Затем последовательно за определенное число итераций направленно осуществляется переход от одного опорного решения к другому вплоть до оптимального. Следует заметить, что на первом шаге в качестве базисных переменных следует выбрать такие m переменные, каждая из которых входит только один раз в одно из m уравнений системы, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных. При этом если выбранные переменные имеют те же знаки, что и соответствующие им свободные члены в правых частях, то полученное базисное решение будет допустимым. В процессе решения системы линейных уравнений необходимо ориентироваться на сохранение неотрицательности всех переменных, поскольку это определяет допустимость решения.

Алгоритм симплексного метода:

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи задана в виде системы неравенств смысла «≤», правые части которых $b_i \geq 0$. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i; i = \overline{1,m}$, где $x_{n+i}; i = \overline{1,m}$ - дополнительные переменные; $x_j; j = \overline{1,m}$ - базисные переменные.

Решим эту систему относительно дополнительных переменных: $x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j; (i = \overline{1,m})$, а функцию цели перепишем в виде уравнения: $F(X) = 0 - (-\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j)$.

Следует заметить, что опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Полагая, что основные переменные $x_1 = ... = x_n = 0$, получим допустимое базисное решение – опорный план, $X_1 = (0;0;0;.....0;b_1;b_2.....)$а значение целевой функции $F(X_1) = 0$, который заносим в симплексную таблицу 1. она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Последняя строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком.

Таблица 1

план	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Значения коэффициентов при				$\Theta_i - \min$
			x_1	x_2	....	x_n	
Индексная строка							

2. Проверка плана на оптимальность. Если значение базисных переменных неотрицательны, то решение является допустимым. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны (≥ 0), то план является оптимальным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный и его необходимо улучшить.

3. Определение ведущей строки. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы свободных членов симплексной таблицы делим на элементы того же знака $\left({}^{+}\!/_{+};{}^{-}\!/_{-}\right)$ ведущего столбца. Результаты заносим в отдельный столбец Θ_i, которые должны быть всегда положительны. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению Θ_i, является ведущей. Она и определяет переменную x_i, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной (обмен).

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют (квадратиком или кружочком).

4. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществятся в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т.е. вместо x_i в базис войдет переменная x_j, соответствующая ведущему столбцу (замена).

Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент, результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующей введенной в базис переменной x_j. В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице запишем 1, а в остальных клетках j столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$НЭ = СТЭ - \frac{A \cdot B}{РЭ}$, где СТЭ – элемент старого плана; РЭ – разрешающий элемент; А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ. Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма – проверке плана на оптимальность.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются отрицательные значения всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

Если в ведущем столбце все коэффициенты $a_{ij} \le 0$, то функция цели $F(X)$ не ограничена на множестве допустимых планов, т.е. $F(X) \to \infty$ и задача не имеет решения.

Если в столбце Θ_i симплексной таблицы содержатся два или несколько одинаковых наименьших значений, то новый опорный план будет вырожденным (одна или нескольких базисных переменных станут равными нулю). Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. многократному повторению процесса вычислений , не позволяющему получить оптимальный план. В таких случаях для выбора ведущей строки используют метод Креко, который заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения Θ_i, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

Например, таблица 2, содержащая три равных значения $\Theta_i = 2$, имеет вид:

Таблица 2

план	Базисные переменные	Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Θ_i
	x_4	4	2	3	6	1	0	0	2	4/2
	x_5	8	4	8	1	0	1	0	4	8/4
	x_6	10	5	12	-1	1	0	1	8	10/5

Допустим, разрешающим столбцом является x_7, тогда разрешающим элементом может быть 2,4 или 5. следуя указанному правилу, получим таблицу 3:

Таблица 3

Значения базисных переменных	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	1	1,5	3	0,5	0	0	1
2	1	2	0,25	0	0,25	0	1
2	1	2,4	-0,2	0,5	0	0,2	1

Сравниваем последовательно слева направо полученные частные по столбцам. В первом и втором столбцах все частные одинаковы, а в третьем столбце наименьшее частное 1,5 в первой строке, следовательно, эта строка и будет разрешающей с разрешающим элементом 2.

Если в оптимальный план вошла дополнительная переменная x_{n+1}, то при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы i-го вида в количестве, полученном в столбце свободных членов симплексной таблицы.

Если в индексной строке симплексной таблицы оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, не вошедшей в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет множество оптимальных планов. Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.