Теория игра
Основные понятия теории игр

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций. Основными ограничениями этой теории являются предположение о полной «идеальной» разумности противников и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного решения.
Конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры – партией, исход игры – выигрышем или проигрышем.

Ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают личные и случайные. ***Личным ходом*** называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. ***Случайным ходом*** называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, пасовка, сдача карт и т.п.)

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

Если в игре участвуют два игрока, игра называется ***парной***, если число игроков больше двух – ***множественной***. Участники множественной игры могут образовывать ***коалиции*** (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную.

Основные группы игр:

1. Игры зависят от причин, вызывающих неопределенность исходов.

- ***Комбинированные*** игра, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнить эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их всех перебрать и проанализировать.
- ***Азартные*** игры, в которых исход оказывается неопределённым в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяются теория вероятностей. Азартными играми теория игр не занимается.
- ***Стратегические*** игра, в которых полная неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

2. По сумме выигрыша.

Игра называется игрой с ***нулевой суммой***, если каждый игрок выигрывает за счет других, а сумма выигрыша одной стороны равна проигрышу другой. В парной игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Парная игра с нулевой суммой называется ***антагонистической*** игрой. Игры, в которых выигрыш одного игрока и проигрыш другого не равны между собой, называются играми с ***ненулевой суммой***.

3. Число возможных стратегий игры.

Игра называется ***конечной***, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий. Игра называется ***бесконечной***, если хотя бы у одного игрока имеется бесконечное число стратегий.

4. По количеству ходов.

Одношаговые игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из допустимых ему стратегий и делает всего один-единственный ход. В ***многошаговых*** играх игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили распространение деловые игры. Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей.

Элементами игровой модели являются:
- участники игры;
- правила игры;
-информационный массив, отражающий состояние и движение ресурсов моделируемой хозяйственной системы.

Преимущества игровой имитации перед реальным объектом таковы:
- наглядность последствий принимаемых решений, переменный масштаб времени;
- повторение имеющегося опыта с изменением установок;
- переменный масштаб охвата коммерческих явлений и объектов.

Основными направлениями использования деловых игр являются следующими:
- учебный процесс;
- аттестация персонала, проверка их компетентности;
- научные исследования;
- разработка бизнес – планов.

В деловых играх задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила проведения игры, представляются варианты возможных решений и оценка их последствий. В игре обязательно присутствует «ведущий», который руководит игрой, оценивает принятые игроками решения, состояния, в которых они могут находиться в процессе игры, и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Постановка игровых задач

Рассмотрим систему управления коммерческого предприятия, структуру которого можно представить как орган управления (дирекция) и некоторое количество производственных единиц (товарных секций или отделов).

Каждый отдел реализует некоторый набор товаров. В зависимости от организации и правого положения руководство может иметь те или иные возможности управления работой отделов. Пусть в данном случае наиболее действенной формой управления является оптимальное распределение ресурсов.

Отдел самостоятельно может выбрать программу выполнения товарооборота. Целью коммерческого предприятия является максимизация доходов или минимизация затрат, связанных с продажей товаров.

Сведем данную задачу к игровой модели.

символы	Игровая модель	математическая модель
n	Число отделов;	Число стратегий отдела.
m	Число различных товарных ресурсов	Число состояний среды
$x_i, i = \overline{1, n}$	Вариант выполнения товарооборота, принимаемый i-м отделом	i-ая стратегия
$y_j, j = \overline{1, m}$	Вид товарного ресурса, выделяемый коммерческим директором	j-е состояние среды
$a_{ij}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$	Набор товаров, реализуемый i-м отделом при выделении j-го вида товарного ресурса.	исход, получаемый при стратегии x_i, и состояние среды y_j.
Y	Суммарный объем ресурсов,	

С	которыми распоряжается директор. Доход или потери, связанные с реализацией товара.	$a_{ij} = F(x_i, y_j)$

Математическая модель: максимизировать (минимизировать) величину

$$C(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2), ...F(x_n, y_m)) \to \max(\min) \text{ при ограничениях } \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} y_j = Y \\ y_j \geq 0 \end{cases}.$$

Пример: Предприятие заключило договор на централизованную поставку овощей из теплиц на сумму 10 000 руб. ежедневно. Если в течение дня овощи не поступают, магазин имеет убытки в размере 20 000 руб. от невыполнения плана товарооборота. Магазин может осуществить самовывоз овощей фермера. Для этого он может сделать заказ в транспортном предприятии, что вызовет дополнительные расходы размере 500 руб. Однако опыт показывает, что в половине случаев посланные машины возвращаются без овощей. Можно увеличить вероятность получения овощей от фермера до 80%, если предварительно посылать туда своего представителя, что требует дополнительных расходов в размере 400 руб. Существует возможность заказать дневную норму овощей у другого надежного поставщика – плодоовощной базы по повышенной на 50% цене. Однако в этом случае, кроме расходов на транспорт (500 руб.), возможны дополнительные издержки в размере 300 руб., связанные с трудностями реализации товара, если в тот же день поступит и централизованная поставка от фермера. Какой стратегии надлежит придерживаться магазину, если заранее неизвестно, поступит или не поступит централизованная поставка.

Игровая модель:

1. Стратегии первого игрока - поставщика

$П_1$ - поставка своевременная

$П_2$ - поставки нет.

2. Магазин – четыре стратегии:

M_1 - ожидать поставку, не принимая дополнительных мер

M_2 - послать к поставщику свой транспорт

M_3 - послать к поставщику представителя и транспорт

M_4 - заказать поставку у плодоовощной базы.

3. Составляем платежную матрицу или матрицы игры.

ситуации	Стоимость овощей	Убытки от недоставки	Транспортные издержки	Командировочные издержки	Издержки от реализации	Всего за день
1	10 000	0	0	0	0	10 000
2	0	20 000	0	0	0	20 000
3	10 000	0	500	0	0	10 500
4	5 000	10 000	500	0	0	15 500
5	10 000	0	500	400	0	10 900
6	8 000	4 000	500	400	0	12 900
7	25 000	0	500	0	300	25 800
8	15 000	0	500	0	0	15 500

Матрица имеет m – строк – по числу стратегий первого игрока; n – столбцов – по числу стратегий второго игрока. На пересечении i-й строки j-го столбца ставится платеж второго игрока первому в ситуации, когда применены i-я и j-я стратегии игроков. Если в данной ситуации выигрывает второй игрок, то платеж будет иметь знак «минус». Платежная матрица

Стратегия магазина	Стратегия фермера

	$П_1$	$П_2$
M_1	-10 000	-20 000
M_2	-10 500	-15 500
M_3	-10 900	-12 900
M_4	-25 800	-15 500

Решая задачу, получаем, что минимальные расходы магазин понесет в том случае, если примет стратегию M_3, т.е. не только пошлет фермеру автотранспорт, но и отправит туда своего представителя.

Методы решения игровых задач

Используют следующие методы:

1. Принцип минимакса (осторожности).
2. Смешанная стратегия.
3. Геометрический метод.
4. Метод линейного программирования.

Принцип минимакса (осторожности).

Имеем конечную парную игру с нулевой суммой. Игрок I имеет m альтернатив ($A_1, A_2, ... A_m$), а игрок II – n стратегий ($B_1, B_2, ... B_n$). Такая игра называется игрой размерностью $m \times n$. Пусть каждая сторона выбрала определенную стратегию: игрок I - $A_i, i = \overline{1,m}$, а игрок II - $B_j, j = \overline{1,n}$. Если такая таблица составлена, то игра приведена к матричной форме и называется матричной игрой.

$a_{ij}, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}$ - выигрыш игрока I, когда игрок выбрал стратегию A_i, а игрок II выбрал стратегию B_j.

$b_{ij}, j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}$ - выигрыш игрока II.

Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью единица некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения чистой стратегией. При этом решение игры будет в чистых стратегиях. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Выбор наилучшей стратегии одним игроком проводится при полном отсутствии информации о принимаемом решении вторым игроком. Необходимо отметить, что и первый, и второй игрок являются разумными противниками, которые находятся в состоянии конфликта. Поэтому для решения игры двух лиц с нулевой суммой ($a_{ij} = -b_{ij}$) используется ***метод минимакса***.

Составляем платежную матрицу:

	B_1	B_2	………	B_n	α_i
A_1 A_2 …….. A_m	a_{11} a_{21} …… a_{m1}	a_{12} a_{22} …… a_{m2}	…….. ………. …………..	a_{1n} a_{2n} ……. a_{mn}	α_1 α_2 ….. α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

Характерные оценки:

1. Если игрок I выбирает стратегию A_i, то игрок II может выбрать такую стратегию B_j, при которой выигрыш игрока I будет равен наименьшему из числа a_{1j}: $\alpha_i = \min_j a_{1j}$, где α_i - минимальное значение из всех чисел первой строки. Тогда для любой стратегии A_i: $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$.

Выбирая стратегию A_i, игрок I должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий игрока II он не выиграет больше, чем α_i, поэтому игрок I должен выбрать ту стратегию, для которой это число α_i - максимально: $\alpha = \max_i \alpha_i$, где α - максимальное значение из всех чисел столбца α_i.

$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$, где α - ***гарантированный выигрыш***, который может обеспечить себе игрок I при любом поведении игрока II. Величина α называется ***нижней ценой игры***, или ***максимином***, а стратегия A_i игрока I, обеспечивающая получение нижней цены игры, называется ***максиминной чистой перестраховочной стратегией***, при этом игрок I при любом поведении игрока II обеспечивает себе выигрыш не меньше α : $\alpha_i \geq \alpha$.

Игрок II заинтересован в том, чтобы уменьшить свой проигрыш, т.е. обратить выигрыш игрока I в минимум.

2. Для выбора оптимальной стратегии он должен найти максимальное значение выигрыша в каждом столбце и среди этих значений выбрать наименьшее. Обозначим через β_j максимальное значение в каждом столбце: $\beta_j = \max_i b_{ij}$. Наименьшее значение β_j обозначим β: $\beta = \min_j \beta_j$. Тогда получаем: $\beta = \min_j \max_i \beta_{ij}$, где β - называется ***верхней ценой игры***, или ***минимаксом***. Стратегия игрока II, обеспечивающая получение верхней цены игры, называется ***минимаксной чистой стратегией***. Применяя ее, игрок II проиграет не больше β при любых действиях игрока I: $\beta_j \leq \beta$.

3. Справедливо неравенство: $\alpha \leq \beta$. Таким образом, придерживаясь максиминной стратегии A_i, игрок I желает получить выигрыш не менее α независимо от действий игрока II, а игрок II , придерживаясь минимаксной стратегии, B_j гарантирует себе проигрыш не больше β.

Принцип максиминной и минимаксной стратегии в теории игр называется принципом минимакса – принцип гарантированного результата. Этот принцип впервые сформулирован Дж. Фон Нейманом в 1928 году.

Существуют матричные игры, для которых нижняя цена игры равна верхней $\alpha = \beta$. Такие игры называются ***играми с Седловой точкой***, в этом случае $\gamma = \alpha = \beta$ называется ***чистой ценой игры***, а стратегии игроков A^*_i, B^*_j, позволяющая достичь этого значения – ***оптимальным.*** Пара A^*_i, B^*_j называется ***Седловой точкой матрицы***, она является минимальным элементом соответствующей строки и максимальным элементом соответствующего столбца. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат.

При постановке задач необходимо иметь в виду некоторые преобразования, которые помогают упростить сложную задачу путем изменения – уменьшения размерности платежной матрицы посредством выделения и исключения доминирующих и дублирующих стратегий. Стратегия игрока A_i доминирует над стратегией A_k, если при любом поведении противника даст не меньший выигрыш (если в платежной матрице все элементы строки A_i не меньше соответствующих элементов строки A_k ,а по крайней мере один строго больше), а если такой же, то дублирует A_k. В таком случае все элементы строки I больше (доминируют) или равны (дублируют) всех элементов строки k.

Аналогичны понятия «доминирующий столбец» и «дублирующий столбец».

В случае необходимости платежную матрицу можно подвергать и другими преобразованиям, не меняющим вероятности активных стратегий игроков:

Теорема: ***Если*** $(\overline{P},\overline{Q},\gamma)$ ***-есть решение игры с матрицей A, то решение игры с матрицей*** $kA+b$ ***есть*** $(\overline{P},\overline{Q},k\gamma+b)$***, где*** $k>0$***, b – любое действительной число.***

Другими словами, платежную матрицу можно упростить, например, прибавляя ко всем элементам достаточно большое положительное число, в результате чего можно получить новую матрицу с положительными (неотрицательными) элементами. Умножая элементы на подходящий положительный множитель (отличный от нуля), можно уменьшить (увеличить) элементы новой матрицы, что облегчает дальнейшие вычисления.

Решение игр в смешанных стратегиях.

Если матричная игра содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса. Если же платежная матрица не имеет Седловой точки, то применение минимаксных стратегий каждым из игроков показывает, что игрок I обеспечит себе выигрыш не меньше α, а игрок II обеспечит себе выигрыш не больше β. Так как $\alpha<\beta$, то игрок I стремится увеличить выигрыш, а игрок II – уменьшить проигрыш. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Значит, смешанная стратегия игрока – это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Для применения смешанных стратегий требуется следующие условия:

1. В игре отсутствует седловая точка.
2. Игроками используется случайная смесь чистых стратегий с соответствующими вероятностями.
3. Игра многократно повторяется в одних и тех же условиях.
4. При каждом из ходов один игрок не информирован о выборе стратегии другими игроками.

Основная теорема теории игр Дж. фон Неймана: *каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение в смешанных стратегиях*. Следствие: *каждая конечная игра имеет цену, являющуюся математическим ожиданием выигрыша игрока I и проигрыша игрока II, причем выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется ценой игры -* γ, *удовлетворяющий условию* $\alpha\le\gamma\le\beta$**.** Каждый игрок при многократном повторении игры, придерживаясь смешанных стратегий, получает более выгодный для себя результат. Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает следующим свойством: *каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.*

Чистые стратегии игроков в их оптимальных смешанных стратегиях называются ***активными***.

Пусть имеем конечную игру 2×2 без Седловой точки с матрицами:

$S_1=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ p_1 & p_2\end{pmatrix}$; $S_2=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ q_1 & q_2\end{pmatrix}$, т.е. имеется платежная матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $S_1^*=(p_1^*,p_2^*)(p_1+p_2=1)$; $S_2^*=(q_1^*,q_2^*)(q_1+q_2=1)$ и цену игры γ. Каковы бы ни были действия противника, выигрыш будет равен цене игры γ. Это означает, что если игрок I придерживается своей оптимальной стратегии $S_1^*(p_1,p_2)$, то игроку II нет смысла отступать от своей оптимальной стратегии $S_2^*(q_1,q_2)$.

Для игрока I имеем систему уравнений: $\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$. Для игрока II аналогично: $\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$. Если $\gamma \neq 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицы не равен нулю, следовательно, данные системы уравнений имеют единственное решение.

$p_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$; $p_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$; $q_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$; $q_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$;

$\gamma = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.