Логарифмические уравнения.

1. Определение: ***Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или (и) в основании логарифма.***

При решении логарифмических уравнений используют:

- свойства логарифмов:

Математическая запись	Словесная формулировка
$\log_a 1 = 0$	Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.
$\log_a a = 1$	Логарифм числа, равного основанию, равен единице.
$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$	Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов от каждого множителя по тому же основанию.
$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$	Логарифм частного двух чисел равен разности логарифмов от делимого и делителя по тому же основанию.
$\lg a^n = n \cdot \lg a$	Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм числа по тому же основанию.

- формулы перехода от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b \qquad \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

Любое логарифмическое уравнение равносильно ***смешанной системе***, ***состоящей из неравенств-*** ограничений, определяющих область допустимых значений (ОДЗ), и ***уравнения – следствия***.

2. Способы решения логарифмических уравнений:

Способы решения	Математическая запись
1. Использование определение логарифма	1. $\left(\log_a x = b\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = a^b \end{cases}$
	2. $\left(\log_{\underset{a>0}{x}} a = b\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ a = x^b \end{cases}$
	3. $\left(\log_a f(x) = \log_a g(x)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
2. Использование свойств логарифмов	1. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$ $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right) = b$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x)\cdot g(x) = a^b \end{cases}$
	2. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x)$ $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \log_a h(x)$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ f(x)\cdot g(x) = h(x) \end{cases}$

	3. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = b$ $\log_a f(x) = \log_a g(x) + b$ $\log_a f(x) = \log_a g(x) + \log_a a^b$ $\log_a f(x) = \log_a \left(g(x) \cdot a^b\right)$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \cdot a^b \end{cases}$
	4. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a h(x)$ $\log_a f(x) = \log_a h(x) + \log_a g(x)$ $\log_a f(x) = \log_a \left(h(x) \cdot g(x)\right)$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ f(x) = h(x) \cdot g(x) \end{cases}$
3. Вынесение за скобки общего множителя	$\log_a f(x) \cdot \log_a g(x) = \log_a f(x)$ $\log_a f(x) \cdot \log_a g(x) - \log_a f(x) = 0$ $\log_a f(x)\left(\log_a g(x) - 1\right) = 0$ $\log_a f(x) = 0$ *или* $\log_a g(x) - 1 = 0$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^0 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) = a^1 \end{cases}$
4. Метод замены переменой	$A\log_a^2 f(x) + B\log_a f(x) + C = 0$ *пусть* $m = \log_a f(x)$, *тогда* $Am^2 + Bm + C = 0$ *решая квадратное уравнение,* *находим корни этого уравнения.* *Так как* $m = \log_a f(x)$, *то* $\log_a f(x) = m_1$ $\log_a f(x) = m_2$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{m_1} \end{cases}$ *или* $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{m_2} \end{cases}$
5. Логарифмирование обеих частей уравнения.	$f(x)^{\log_a f(x)} = b$ $\log_a f(x)^{\log_a f(x)} = \log_a b$ $\log_a f(x) \cdot \log_a f(x) = \log_a b$ $\log^2{}_a f(x) = \log_a b$