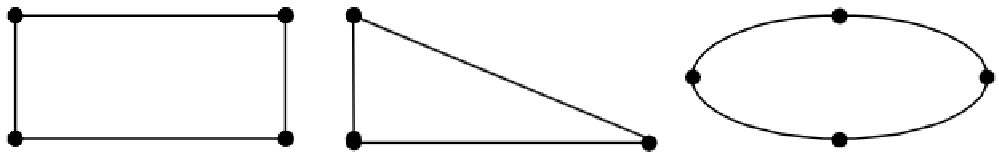
ГРАФЫ.

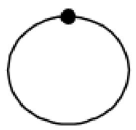
Графом G(V, E) называется совокупность двух множеств – непустого множества объектов некоторой природы V (вершин графа) и множества E неупорядоченных пар элементов множества V , называемых ребрами графа. Таким образом, граф определяется множеством вершин V, множеством рёбер E (подмножеством двухэлементных подмножеств множества V) и отношением инцидентности, которое каждому ребру сопоставляет одну или две вершины. При изображении графов на рисунках отрезки (ребра) могут быть криволинейными и прямолинейными, а длины отрезков и расположение точек произвольно.

Ребро графа называется звеном, если у него два конца, и петлей, если конец один (петля это ребро, у которого два конца совпадают). Два или более звеньев, имеющих одинаковые пары концов, образуют кратное соединение и называются кратными рёбрами. Граф без петель и кратных рёбер называется простым. Примеры графов изображены на рисунке.



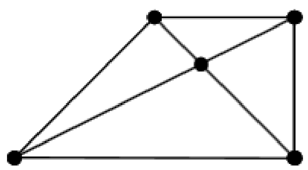
Один и тот же граф $n = 4$, $m = 4$

Граф-вершина

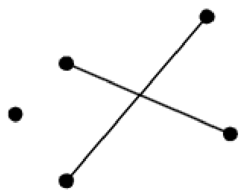


Граф-петля

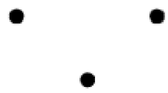
Граф-звено



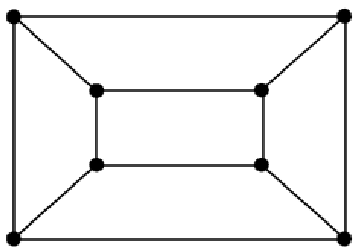
$n = 5$, $m = 8$



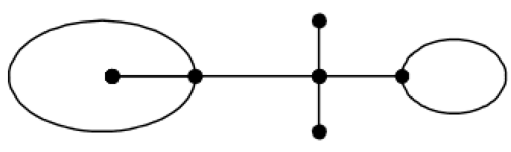
$n = 5$, $m = 2$



$n = 3$, $m = 0$

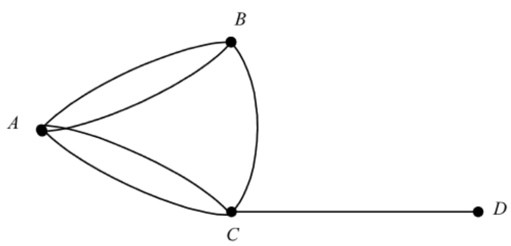


Граф куба



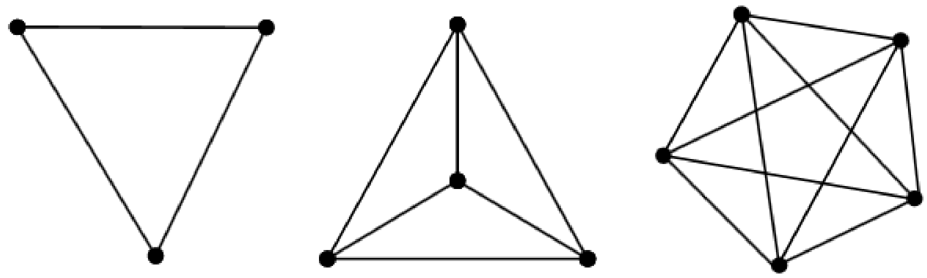
Граф с петлями

Вершины графа будем обозначать буквами русского и латинского алфавитов или цифрами, а ребра графа – парами вершин (A, B), (B, C) или буквами латинского алфавита.

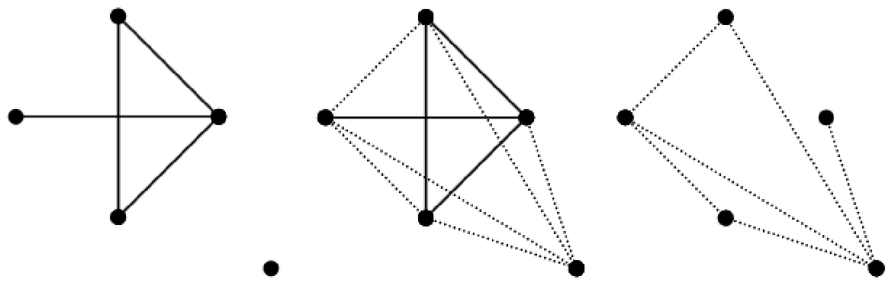


Мультиграфом называется пара множеств, состоящая из множества вершин и множества ребер, причем две вершины могут быть соединены более чем одним ребром. Например, граф на рис. является мультиграфом. Вершины графа x, y – смежные, если они соединены ребром. Поэтому вершины C и D на рис. являются смежными, а D и A – нет.

Граф называется полным, если любые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром. Такой граф имеет максимальное число ребер. Каждой вершине в полном графе с n вершинами, который в дальнейшем будем обозначать K_n, принадлежит (n –1) ребро. Но в произведении n(n – 1) каждое ребро учитывается дважды, поэтому в полном графе n(n – 1)/2 ребер. На рис. приведены примеры полных графов: K_3 , K_4, K_5.

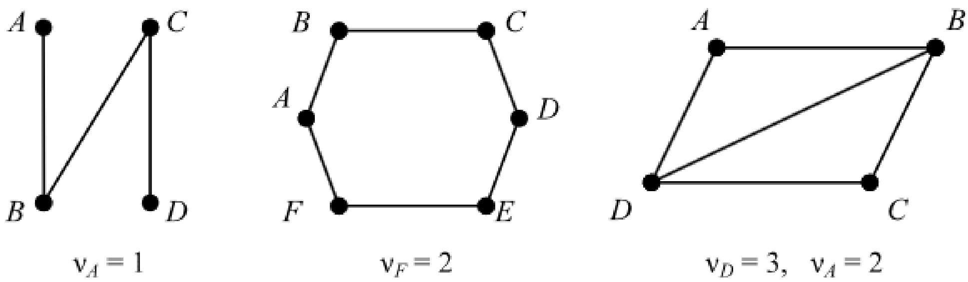


Граф, не являющийся полным, можно преобразовать в полный, добавив к нему недостающие ребра. Дополнением графа G называется граф D с теми же вершинами, что и граф G, и теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G, чтобы получился полный граф. На рис. 1.6 представлен неполный граф и его дополнение.



Неполный граф *G* Полный граф Дополнение графа *G*

Степенью (валентностью) ν_A вершины A называется число рёбер графа, которым принадлежит эта вершина (число ребер, инцидентных вершине A, причем петля считается дважды). На представлены графы с различными степенями вершин.



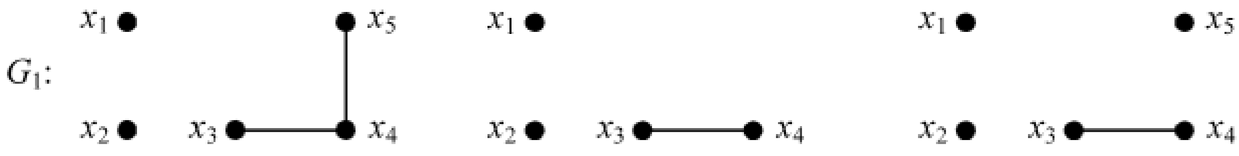
Вершина A является четной, если ν_A – четно, и нечетной, если ν_A – нечетно. Вершины, у которых $\nu_A = 1$, называются висячими.

У полного графа с n вершинами степень любой вершины $\nu_A = n - 1$, для изолированной вершины $\nu_A = 0$.

Во всяком графе G сумма степеней всех его вершин число четное, равное удвоенному числу ребер графа.

Во всяком графе с n вершинами (n ≥ 2) всегда найдется по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.

Часть вершин графа G и все инцидентные к ним рёбра образуют подграф графа G. Если такой подграф полный, то он называется кликой графа G. Очевидно, что множество подграфов определяется количеством вершин исходного графа. Все вершины и часть инцидентных им рёбер называется суграфом (остовным подграфом) графа G. Например, на рис. приведены подграф и суграф графа G $_1$.

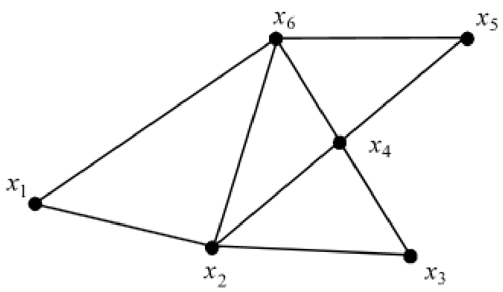


Подграф G_1: Суграф G_1:

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин a_i и ребер e_i

$a=a_0,e_0,a_1,e_1,\ldots\ldots e_{n-1},a_n=b$

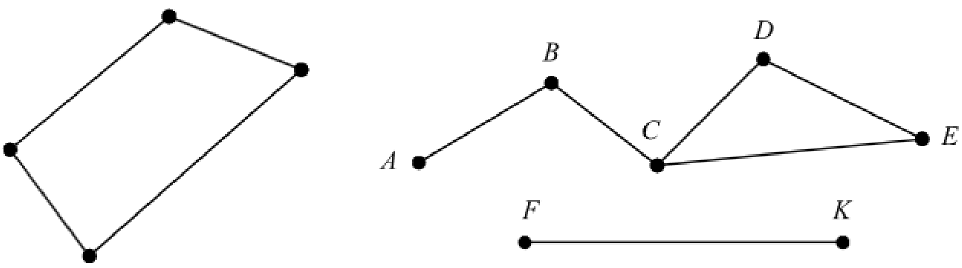
где $e_i = (a_i, a_{i-1})$, a – начало маршрута, b – конец маршрута. Маршрут можно задавать, например, перечислением его вершин ($a_0,a_1,\ldots\ldots a_n$). В маршруте ребра и вершины могут повторяться. Если в нем все ребра различны, то он называется цепью. В цепи вершины могут повторяться. Если все вершины в цепи различны, то она является простой цепью. Например, на рис. 1.12 последовательность вершин x_1 , x_2, x_3, x_4, x_6, x_4, x_5 является маршрутом из x_1 к x_5, а вершины x_1 , x_2, x_3, x_4, x_5 определяют простую цепь (простой путь) x_1 в x_5.



Длина маршрута в графе измеряется количеством ребер в нем (с повторениями). Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины А и В, определяет расстояние между ними.

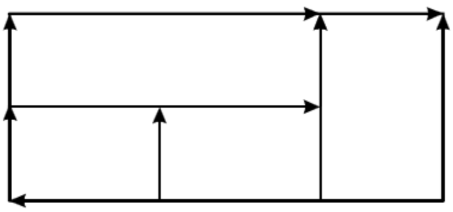
Циклом называется замкнутая цепь, в которой совпадают ее начальная и конечная вершины. Простым циклом в графе называется простая замкнутая цепь. На рисунке x_2, x_3, x_4, x_6, x_5, x_4, x_2- цикл, x_2, x_3, x_4, x_2 –простой цикл. Длина цикла измеряется числом рёбер в этом цикле.

Две вершины А и В графа G называются связанными, если в графе есть цепь (путь) с концами А и В. Две вершины А и В не связаны в G, если в графе нет ни одного пути, связывающего их. Граф называется связным, если любые две его вершины связаны. Граф называется несвязным, если хотя бы две его вершины не связаны. Например, на рис. представлен связный (а) и несвязный (б) граф.

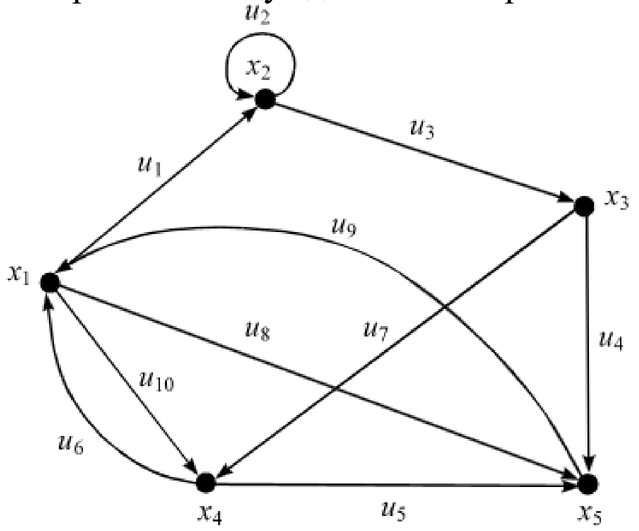


Связный граф Несвязный граф

Для решения различных практических задач часто возникает необходимость рассмотрения ориентированных графов (орграфов). Например, орграф возникает при изображении графа улиц и перекрестков города с односторонним движением.



Ориентированным графом $\bar{G} = (X, \mathit{\Gamma})$ называется множество X, не обязательно конечное, рассматриваемое вместе с некоторым отображением $\mathit{\Gamma}: X \to X$, которое может не быть однозначным. Элементы множества X (или точки) называются вершинами орграфа $\bar{G}$, а пара вершин (x, y) называется *дугой*, если $y = \mathit{\Gamma} x$. Точка x в этом случае – начало дуги (предшествующая вершина), а точка y – конец дуги (последующая вершина)[1 – 3]. Например, в орграфе $\bar{G}$ на рисунке изображено 10 дуг для числа вершин n=*5*.



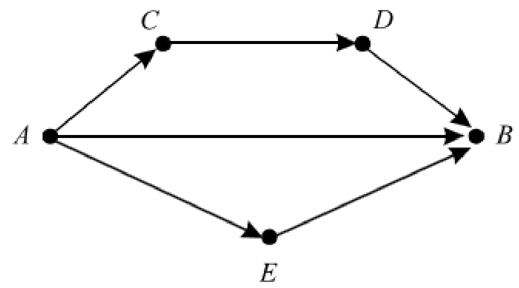
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},\ \mathit{\Gamma} x_1 = \{x_2, x_4, x_5\},\ \mathit{\Gamma} x_2 = \{x_2, x_3\},$$
$$\mathit{\Gamma} x_3 = \{x_4, x_5\},\ \mathit{\Gamma} x_4 = \{x_1, x_5\},\ \mathit{\Gamma} x_5 = \{x_1\}.$$

Две вершины называются *смежными*, если они соединены дугой, а две дуги смежные, если у них общая вершина. Например, на рис. вершины x_1, x_2 и дуги u_1, u_3 являются смежными.

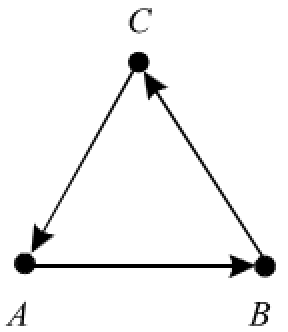
Говорят, что вершина x и дуга графа u являются *инцидентными*, если вершина x есть начало или конец этой дуги. На рис. вершина x_1 инцидентна дуге u_1, а вершина x_5 не инцидентна дуге u_3.

Полустепенью исхода (степенью выхода) μ вершины A орграфа называется число выходящих из A дуг, а *полустепенью захода* (степенью входа) ν – число входящих дуг. Очевидно, что в графе G для изолированной вершины степень входа и степень выхода равны нулю. Если в вершине графа есть только выходящие дуги, то она называется *источником*, если есть только входящие дуги, то она называется *стоком*.

Путем в графе G от вершины A_1 к A_n называется последовательность ориентированных ребер (A_1, A_2), …, (A_{n-1}, A_n) такая, что конец каждого предыдущего совпадает с началом следующего. Очевидно, что если в $\overline{G}$ есть путь от A и B, то пути B к A может не быть. Если существует ориентированный путь от A к B, то говорят, что B достижима из A. Длина пути измеряется числом дуг в пути. В графе $\overline{G}$ расстояние $d(A, B)$ от вершины A до B, определяется длиной кратчайшего пути от A до B. Если пути от A к B нет (вершина B не достижима из A), то длина пути между этими вершинами считается бесконечной ($d(A, B) = \infty$). Например, у графа на рис. $d(A, B) = 1$, $d(C, B) = 2$, $d(B, C) = \infty$.

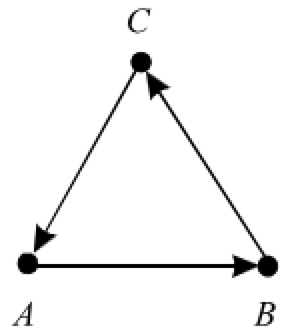


Для орграфов цепь называется путем, простая цепь – простым путем, цикл (замкнутая цепь) – контуром, а простой цикл – простым контуром. Орграф называется сильным (сильно связным), если любые две его вершины достижимы друг для друга и односторонним, если для любой пары его вершин, по меньшей мере, одна достижима из другой.



Сильный граф

а



Односторонний граф

б