



# **СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ**

## Сетевое планирование и управление

### 1. Основные понятия.

В основе методов СПУ лежит графическое представление проекта (комплекса работ для достижения поставленной цели) в виде сетевого графика. Сетевой график можно рассматривать как совокупность  $G$  некоторого количества точек  $E_1; E_2 \dots$  и соответственно между ними установленных связей  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots$ . Объект  $G$  называется *графом*, точки  $E_1; E_2 \dots$  его *вершинами*, связи  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots$  - *дугами*. Ориентация дуг, т.е. указание «начала» и «конца» каждой из них, делает *граф ориентированным (орграфом)*. Граф  $G = (E, \vec{e})$  считается заданным, если заданы все его вершины и дуги. Будем отождествлять вершины орграфа с событиями, а дуги – работами. *События и работы* – основные понятия в СПУ.

**Работа** – это любое действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. На сетевых графиках работы изображаются отрезками прямых линий с указанием направления (стрелками). Рядом со стрелкой указываются числовые характеристики: время выполнения работы, расход ресурса, количество исполнителей и т.д. Под работами подразумеваются не только реальные хозяйственные или технологические процессы, требующие затрат времени и ресурсов для их осуществления, но и процессы, потребляющие только время. Также принято считать работами и те процессы, которые не требуют ни затрат времени, ни ресурсов. Это так называемые *зависимости*, или *фиктивные работы*. Они показывают, что одна работа не может совершаться раньше другой. Они показывают, что одна работа не может совершаться раньше другой. На сетевых графиках фиктивные работы обычно изображают пунктирными стрелками.

**События** обозначает факт окончания всех работ в него входящих или начала работ из него выходящих. События не имеет протяженности во времени. На сетевом графике события изображаются геометрическими фигурами (кругами, квадратами). Чаще кругами с указанием номера или шифра события. В каждое событие может входить и выходить из него несколько работ, а каждая работа ограничена двумя событиями. Событие выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в данное событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в это событие.

Событие, с которого начинается выполнения проекта, является *исходным*, оно не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим*, оно не имеет последующих работ, все прочие события являются *промежуточными*.

Существует и другой способ изображения проекта, в котором вершины графа изображают работы, а дуги, их соединяющие, указывают события.

### 2. Правила построения сетевых графиков

Прежде чем представить проект сетевых графиков, необходимо составить перечень работ, оценить продолжительность каждой работы и установить последовательность работ, т.е. точно определить, какие работы обязательно должны быть закончены, чтобы могла начаться любая из работ, входящих в проект. Такой перечень удобно представить в виде структурно – временной таблицы.

При построении сетевых графиков следует соблюдать определенные правила, вот некоторые из них:

- в сетевых графиках не должно быть «тупиков», т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего событий).
- в сетевых графиках не должно быть и событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.
- при построении сетевых графиков нельзя допускать, чтобы два смежных события были связаны двумя или большим количеством работ, что чаще всего бывает при изображении

параллельно выполняемых работ. Эта ошибка приводит к путанице из-за того, что две различные работы будут иметь одно и то же обозначение. Чтобы избежать этого, рекомендуется ввести дополнительное событие и связать его с последующим зависимостью или фиктивной работой.

- в сети не должно быть замкнутых циклов, т.е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

- кроме того, если какие-либо сложные работы могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им работы, то последняя изображается как ряд последовательно выполняемых работ, каждая из которых завершается определенным событием.

- если для выполнения одной из работ необходимо получение результатов всех работ, входящих в предшествующее для нее событие, а для другой работы достаточно получить результат только одной или нескольких из этих работ, то должно быть дополнительно введено новое событие, отражающее результаты только этих последних работ, а также фиктивная работа, связывающая новое событие с прежним.

Построенный с соблюдением этих правил график является сетевой моделью выполнения проекта. При этом сначала обычно составляются частные сетевые графики, охватывающие работы по отдельным, имеющим самостоятельное значение частям общего комплекса работ, а затем путем «сшивания» получается комплексный (сводный) график, охватывающий всю совокупность работ, подлежащих выполнению.

На построенном графике работы можно идентифицировать номерами начального и конечного события  $(i, j)$ , причем, события имеют упорядоченную нумерацию, т.е. для любой работы  $(i, j)$  выполняется неравенство  $i < j$ . Но обычно, после того, как сеть построена, для удобства работы с ней, нужно перенумеровать события. Для этого можно воспользоваться графическим способом упорядочения вершин графа по рангам (методом вычеркивания дуг):

- исходную вершину (в которую не входит ни одна дуга) отнесем к рангу 0 и присвоим ей номер 1.

- вычеркнем все дуги, выходящие из вершины 1 и отнесем события, оказавшиеся без входящих дуг, к первому рангу. Этим событиям присвоим в произвольном порядке номера  $2, 3, \dots, k_1$ .

- вычеркнув все дуги, выходящие из вершины предыдущего ранга  $i$ , отнесем вершины, оказавшиеся без входящих дуг, к следующему  $(i+1)$ -му рангу. Присвоим им номера  $k_i + 1, \dots, k_{i+1}$ . Этот шаг повторяем до тех пор пока все вершины не будут пронумерованы.

### 3. Расчет временных параметров сетевого графиков

К основным параметрам сетевого графика относятся: продолжительность выполнения всего проекта, времена свершения событий, сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

1. Любая последовательность работ сети, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется **путем**. Под **длиной пути**  $(i, j_1), (j_1, j_2), \dots, (j_k, j)$  из  $(i)$  в  $(j)$  будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь, т.е. число  $t_{i, j_1} + t_{j_1, j_2} + \dots + t_{j_k, j}$ . Путь в котором начальная вершина совпадает с исходным событием, а конечная – с завершающим, называется **полным**. Путь от исходного события до любого промежуточного называется **предшествующим событию путем**. Путь от данного события до завершающего называется **последним путем**. Особое значение придается критическому пути. **Критическим** называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Таких путей в сети может быть несколько. Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются **критическими**. Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, равна **критическому**

времени  $t_{кр}$  выполнения всего комплекса работ. На сетевом графике критический путь, как правило, выделяется двойной или жирной линией.

Расчет основных **временных параметров** производится по соответствующим формулам. Расчет используется методом динамического программирования.

**2. Ранним сроком  $t_p(j)$  свершения события  $j$**  называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Счет времени будем вести от момента наступления начального события. Для удобства расчетов, полагаем, что ранний срок свершения исходного (1-го) события равен нулю ( $t_p(1) = 0$ ). Ранний срок любого последующего события ( $j$ -го) определяется продолжительностью самого длительного из предшествующих путей. Отсюда, для определения ранних сроков свершения событий имеем рекуррентное соотношение:

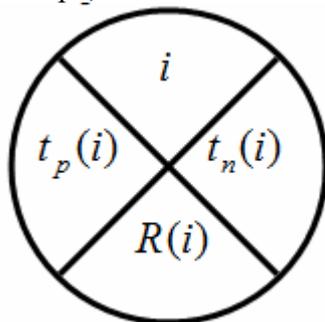
$$t_p(j) = \max_{(i,j) \in u_j^+} \{t_p(i) + t_{ij}\} (j = \overline{2, n}).$$

**3. Поздним сроком  $t_n(i)$  свершения события  $i$**  является самый поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием. Очевидно, что  $t_n(i)$  определяется разностью между  $t_{кр}$  и длиной максимального из последующих путей. Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают. Поздний срок находится по формуле:

$$t_n(n) = t_{кр} : t_n(i) = \min_{(i,j) \in u_i^+} \{t_n(j) - t_{ij}\} (i = \overline{1, n-1}).$$

4. Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет **резерв времени события  $(i)$** .  $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$ . Интервал  $[t_p(i); t_n(i)]$  называется интервалом свободы события  $(i)$ . Поскольку у критических событий ранние и поздние сроки совпадают, то резервы критических событий равны 0.

При расчете временных параметров вручную (если количество событий невелико) удобно вычислять непосредственно на графе, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делится на четыре сектора, в каждом из которых записывается соответствующая информация.



Проставляем в верхний секторах номера событий (в соответствии с ранжированием).

- рассматривая события в порядке возрастания номеров, и имея в виду, что  $t_p(1) = 0$ , по входящим в это событие работам по формуле  $t_p(j) = \max_{(i,j) \in u_j^+} \{t_p(i) + t_{ij}\} (j = \overline{2, n})$  определяем  $t_p(j)$  и записываем в левом секторе.

- начиная с конечного события, для которого  $t_n(n) = t_{кр}$  ( $n$ -номер конечного события), для каждого события по выходящим из него работам по формуле  $t_n(i) = \min_{(i,j) \in u_i^+} \{t_n(j) - t_{ij}\} (i = \overline{1, n-1})$  определяем  $t_n(i)$  и записываем в правом секторе.

- в нижнем секторе записываем резерв времени события  $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$ .

- критические события имеют резерв времени равный 0, они и определяют критические работы и критический путь.

Зная сроки свершения событий, можно определить временные параметры работ.

1. **Ранний срок начала работы  $(i, j)$**  равен раннему сроку свершения событий  $(i)$ :  $t_{п.н.}(i, j) = t_p(i)$ . **Ранний срок окончания работы** равен сумме раннего срока свершения

начального события работы и ее продолжительности:  $t_{p.o.}(i, j) = t_p(i) + t_{ij}$  или  $t_{p.o.}(i, j) = t_{p.n.}(i, j) + t_{ij}$

2. **Поздний срок окончания работы** совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:  $t_{n.o.}(i, j) = t_n(i)$ . **Поздний срок начала работы** равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью:  $t_{n.n.}(i, j) = t_n(j) - t_{ij}$  или  $t_{n.n.}(i, j) = t_{n.o.}(i, j) - t_{ij}$ . Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых  $t_{p.n.}(i, j)$  и  $t_{n.o.}(i, j)$ , то они могут иметь разного вида резервы времени.

3. **Полный резерв времени работы** – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока:  $R_n(i) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}$ . Все не критические работы имеют полный резерв времени отличный от нуля.

4. **Свободный резерв времени** – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное и конечное ее событие наступят в свои ранние сроки:  $R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij}$  свободный резерв присущ только данной работе, и его использование никак не повлияет на выполнение последующих работ. Только отдельные работы проекта обладают свободным резервом времени.

5. **Независимый резерв времени** – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное ее событие наступит в свой поздний срок, а конечное – в ранний срок:  $R_n(i, j) = \max\{0, t_p(j) - t_n(i) - t_{ij}\}$ .

Использование независимого резерва времени на работе, которая его имеет, не влияет на ранние и поздние сроки свершения всех событий и работ сети. Его нельзя передать ни предшествующим, ни последующим работам, он присущ только данной работе.

