Основные понятия марковских процессов

Функция $X(t)$ называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется ***случайным процессом***.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место марковских процессов среди других классов случайных процессов обусловлено следующими обстоятельствами: для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи; с помощью марковских процессов можно описать (точно или приближенно) поведение достаточно сложных систем.

Определение. Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется ***марковским*** (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любою момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние. То есть в марковском случайном процессе будущее развитие процесса не зависит от его предыстории.

Классификация марковских процессов. Классификация марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды марковских случайных процессов:

· с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
· с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);
· с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
· с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Здесь будут рассматриваться только марковские процессы с дискретными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. То есть эти состояния можно перенумеровать одно за другим, а сам процесс состоит в том, что система случайным образом скачком меняет свое состояние.

Граф состояний. Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний (рис. 1.1.), где квадратиками обозначены состояния S_1, S_2,... системы S, а стрелками - возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

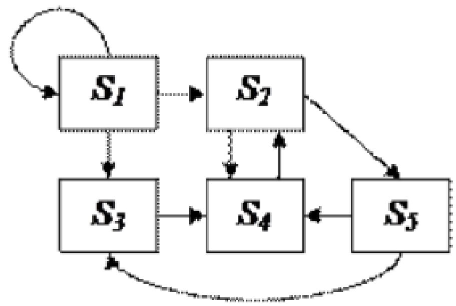

Рис. 1.1

Марковские цепи

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем ***называют марковской цепью***.

Для такого процесса моменты t_1, t_2, когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время t, а номер шага 1, 2, k, Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(k)$, где $S(0)$ - начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ - состояние системы после первого шага; $S(k)$ - состояние системы после k -го шага...

Событие $\{ S(k) = S_i \}$, состоящее в том, что сразу после k -го шага система находится в состоянии S_i (i = 1, 2,), является случайным событием. Последовательность состояний $S(0)$, $S(1)$, $S(k)$, можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется ***марковской цепью****, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния* S_i *в любое* S_j *не зависит от того, когда и как система пришла в состояние* S_i. Начальное состояние $S(0)$ может быть заданным заранее или случайным.

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после k -го шага (и до (k + 1)-го) система S будет находиться в состоянии S_i (i = 1, 2, n). Очевидно, для любою k $\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1$

Начальным распределением вероятностей Марковской цепи **называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:**
$P_1(0), P_2(0), P_i(0), P_n(0)$.

В частном случае, если начальное состояние системы S в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $P_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k -м шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k -го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим (после k - 1 шага) она находилась в состоянии S_i.

Поскольку система может пребывать в одном из n состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2 вероятностей перехода P_{ij}, которые удобно представить в виде следующей матрицы: $\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$

где P_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j;
P_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i.

Такая матрица называется переходной или матрицей переходных вероятностей.

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая *цепь маркова называется* ***однородной***.

Переходные вероятности однородной Марковской цепи P_{ij} образуют квадратную матрицу размера $m \times n$.

Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i -го) состояния, в том числе и переход в самое себя.
2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное (j -е) состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец - в состояние).
3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий: $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}$
4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности P_{ii} того, что система не выйдет из состояния S_i, а останется в нем.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей $\left\| P_{ij} \right\|$, то вероятности состояний системы $P_i(k)$ (i, j = 1, 2, n) определяются по рекуррентной формуле: $P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji},\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n})$

Непрерывные цепи Маркова

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется ***непрерывной цепью Маркова*** при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

Часто встречаются ситуации, которые указать заранее невозможно. Например, любая деталь или агрегат могут выходить из строя в любой, непредсказуемый заранее момент времени. Для описания таких систем и отдельных случаев можно использовать математический аппарат непрерывной цепи маркова.

Пусть система характеризуется n состояниями S_1, S_2, …, S_n, а переход из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии S_i (i = 1, 2,..., n). Требуется определить для любого t вероятности состояний $P_1(t)$, $P_2(t)$, …, $P_n(t)$. Очевидно, что $\sum_{i=0}^{n} P_i(k) = 1$.

Для процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотности вероятностей перехода λ_{ij}, представляющие собой предел отношения вероятности перехода системы за время Dt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P_{ij}(t;\triangle t)}{\triangle t}$$

где P_{ij}(t, Δt) – вероятность того, что система, пребывавшая в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j (при этом всегда $i \neq j$).

Если λ_{ij} = const, то процесс называется однородным, если плотность вероятности зависит от времени $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$, то процесс - неоднородный.

При рассмотрении непрерывных марковских процессов принято представлять переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий.

Плотность вероятности перехода интерпретируется как интенсивность λ_{ij} соответствующих потоков событий. Если все эти потоки пуассоновские, то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

При изучении марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем в графе состояний над стрелками, ведущими из состояния S_i в S_j, проставляют соответствующие интенсивности λ_{ij}. Такой граф состояний называют размеченным.

Пусть система S имеет конечное число состояний S_1, …, S_n. Случайный процесс, протекающий в этой системе, описывается вероятностями состояний $P_1(t)$, …, $P_n(t)$, где $P_i(t)$ - вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии S_i. Для любого t $\sum_{i=0}^{n} P_i(k) = 1$

Вероятности состояний *$P_i(t)$* находят путем решения системы *дифференциальных уравнений (уравнении Колмогорова),* имеющих вид $\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$

где *i* = 1, 2, …, *n*.

Величина λ_{ij} *$P_{ij}(t)$* называется потоком вероятности перехода из состояния S_i в S_j, причем интенсивность потоков λ_{ij} может зависеть от времени или быть постоянной.

Уравнения составляют по размеченному графу состояний системы, пользуясь следующим мнемоническим правилом: ***производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.***

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений, нужно задать начальное распределение вероятностей $P_1(0)$, …, $P_n(0)$. Для решения применяют численные методы.

Поток событий. Простейший поток и его свойства

При исследовании непрерывных марковских цепей, как было уже отмечено, часто бывает удобно представить переход системы из состояния в состояние как воздействие каких-то потоков событий (поток заявок на обслуживание, поток автомобилей, поток документов и т.п.).

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например, поток покупателей в магазин, поток машин на СТО, поток неисправностей у одного автомобиля и др.

Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается на практике и не представляет особого интереса.

Различают следующие основные свойства, которыми могут обладать случайные потоки событий:

· *стационарность;*

· *ординарность;*

· *отсутствие последействия.*

Стационарность. Свойство стационарности проявляется в том, что вероятность попадания того или иного числа событии на участок времени *t* зависит только от длины участка и не зависит от расположения на оси *0t.* Другими словами, стационарность означает неизменность вероятностного режима потока событий во времени. Поток, обладающий свойством стационарности, называют стационарным. ***Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным***. В большинстве случаях реальные потоки событий являются в действительности стационарными лишь на ограниченных участках времени. Например, поток автомобилей проезжающих по улице с 15 до 16 часов можно считать стационарным. Но, тот же поток в течение суток уже не будет стационарным (ночью поток машин, проезжающий по улице.

Ординарность. Свойство ординарности потока присутствует, если вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событии пренебрежимо мала по сравнению с длиной этого участка. Свойство ординарности означает, что за малый промежуток времени практически невозможно появление более одного события. Поток, обладающий свойством ординарности, называют ординарным. Реальные потоки событий в различных производственно-экономических системах либо являются ординарными, либо могут быть достаточно просто приведены к ординарным.

Отсутствие последействия. Данное свойство потока состоит в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Поток, обладающий свойством отсутствия последействия, называют потоком без последействия. Поток событий, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется ***простейшим потоком событий.***

Под интенсивностью потока понимают $\lambda(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{m(t, t+\tau)}{\tau}$, где m(t, t + τ) – среднее число событий в (t, t + τ).

Для простейшего потока интенсивность λ= const. Если поток событий не имеет последействия, ординарен, но не стационарен, то его называют **нестационарным пуассоновским потоком**, а его интенсивность зависит от времени, т. е. λ = λ (t).

В пуассоновском потоке событий (стационарном и нестационарном) число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по закону Пуассона: $P_m = \frac{a_m}{m!} e^{-a}$ m = 0, 1, …,

где P_m – вероятность попадания на участок m событий;

a – среднее число событий, приходящихся на участок.

Для простейшего потока *a* = λτ, а для нестационарного пуассоновского потока $a = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$

где τ – длина участка времени; t_0 – начало участка τ.

Отметим еще одно важное свойство простейшего потока событий. Промежуток времени t между соседними событиями распределен по показательному (экспоненциальному) закону, а его среднее значение $\overline{T}$ и среднее квадратическое отклонение σ равны, т. е. $\overline{T} = \sigma = \frac{1}{\lambda}$,

где λ – интенсивность потока.

Для нестационарного пуассоновского потока закон распределения промежутка t уже не является показательным, так как зависит от положения на оси 0t и вида зависимости λ(t). Однако для некоторых задач при сравнительно небольших изменениях λ(t) его можно приближенно считать показательным с интенсивностью λ, равной среднему значению λ(t).

Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем называется такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения. Изменения этого процесса могут происходить в любой момент времени, т. е. в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным.

В практике встречаются процессы чистого размножения и чистой гибели. Процессом чистого размножения называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю; аналогично процессом чистой гибели называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков размножения равны нулю.

Запишем его в виде системы:

$$(p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4) = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4) * \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1 = 0.2p_1 + 0.2p_2 + 0.1p_3 \\ p_2 = 0.4p_1 + 0.4p_2 + 0.4p_3 + 0.4p_4 \\ p_3 = 0.4p_1 + 0.3p_2 + 0.4p_3 + 0.5p_4 \\ p_4 = 0.1p_2 + 0.1p_3 + 0.1p_4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -0.8p_1 + 0.2p_2 + 0.1p_3 = 0 \\ 0.4p_1 - 0.6p_2 + 0.4p_3 + 0.4p_4 = 0 \\ 0.4p_1 + 0.3p_2 - 0.6p_3 + 0.5p_4 = 0 \\ 0.1p_2 + 0.1p_3 - 0.9p_4 = 0 \end{cases}$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Ее можно решить, например, методом Гаусса. Для этого необходимо привести матрицу системы к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & -0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ -0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \end{pmatrix} \rightarrow$$ вычтем из 3 вторую сложим вторую с

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & -1 & 0.9 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.1 \\ 0 & -1 & 0.9 & 0.8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

первой *2 сложим 2 и 3 и эту сумму прибавим к 4

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.9 \\ 0 & 0 & -1.9 & 8.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вычтем из 3-ей вторую, умноженную на 9

$$\begin{cases} 0.4p_1 - 0.6p_2 + 0.4p_3 + 0.4p_4 = 0 \\ 0.1p_2 + 0.1p_3 - 0.9p_4 = 0 \\ -1.9p_3 + 8.2p_4 = 0 \end{cases}$$

Система приведена к треугольному виду. Но мы имеем 3 уравнения и 4 неизвестных. Добавим условие $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, т.к. систем обязательно находится в одном из своих состояний.

Получим:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{4}(6p_2 - 4p_3 - 4p_4) \\ p_2 = 9p_4 - p_3 \\ p_3 = \frac{82}{19}p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \quad или \begin{cases} p_1 = \frac{65}{38}p_4 \\ p_2 = \frac{89}{19}p_4 \\ p_3 = \frac{82}{19}p_4 \\ \frac{65}{38}p_4 + \frac{89}{19}p_4 + \frac{82}{19}p_4 + p_4 = 1 \end{cases}$$ П

Откуда $p_4 = \frac{38}{445} \approx 0.08$; $p_3 = \frac{164}{445}$; $p_2 = \frac{178}{445}$; $p_1 = \frac{65}{445} \approx 0.15$

Периодичность возвращения в состояние S_i равна $\frac{1}{p_i}$.

Следовательно, периодичность засушливых лет в среднем равна $\frac{1}{p_1} = \frac{445}{65} \approx 6.85$, т.е. 6-7 лет, а дождливых $\frac{1}{p_4} = \frac{445}{38} \approx 12$ лет.