Транспортные задачи линейного программирования

1. Постановка задачи

Под термином «транспортные задачи» понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов. На автомобильном транспорте наиболее часто встречаются следующие задачи, относящиеся к транспортным:

- Прикрепление потребителей ресурсами к производителям.
- Привязка пунктов отправления к пунктам назначения.
- Взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений.
- Отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования.
- Оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами – изготовителями и др.

Рассмотрим экономико-математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения. Имеются m пунктов отправления груза и объем отправления по каждому пункту $a_1, a_2, ..., a_m$. Известна потребность в грузах $b_1, b_2, ..., b_n$ по каждому из n пунктов назначения. Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту $c_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, т.е. ***определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого i-го пункта отправления (от поставщика) в каждый j-й пункт назначения (до потребителя)*** x_{ij} ***с минимальными транспортными издержками.*** $Z\min = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$

В общем виде исходные данные представлены в таблице.

поставщики	потребители				Запасы (объем отправления)
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
…….	…………..	…………..	…	…………..	…………
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{2m}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
потребность	b_1	b_2	….	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

$\sum_{i=1}^{m} a_i$ - суммарный запас груза поставщиков;

$\sum_{j=1}^{n} b_j$ - суммарная величина заявок;

$c_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - транспортные издержки (транспортный тариф).

Следует иметь в виду:

- Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений, определяемое матрицей $X = (x_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$; называется ***допустимым планом*** транспортной задачи.
- Ранг матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений транспортной задачи, на единицу меньше числа уравнений, т.е. равен *(m+n-1).* Следовательно, число линейно независимых уравнений равно *(m+n-1),* они образуют базис, а соответствующие им *(m+n-1)* переменные будут являться базисными.

- Допустимый план транспортной задачи, имеющий не более *(m+n-1)* отличных от нуля величин x_{ij}, называется ***опорным***.
- Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности *(m+n-1),* то план является ***невырожденным***, если меньше, то план называется ***вырожденным***.
- План $X=(x_{ij}), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется ***оптимальным планом*** транспортной задачи.
- для решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы груза в пунктах отправления были равны сумме заявок пунктов назначения: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.
- Транспортная задача называется ***закрытой***, если суммарный объем отправляемых грузов равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.Если такого равенства нет (потребности выше запасов или наоборот), задачу называют ***открытой***, т.е.: $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.
- В случае превышения запаса над заявками: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный *(n+1)* пункт назначения с потребностью $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1}=0, i=\overline{1,m}$.
- При $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный *(m+1)* пункт отправления с запасом груза $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и соответствующие тарифы принимаются равными нулю: $c_{m+1\,j}=0, j=\overline{1,n}$.

Наилучшим элементом матрицы тарифов *C* называется наименьший тариф, если задача поставлена на минимум, наибольший тариф – если задача поставлена на максимум целевой функции.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:
- Распределению подлежат однородные ресурсы.
- Условия задачи описываются только уравнениями.
- Все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения.
- Во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице.
- Каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплекс – методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы решения.

<u>2. Методы построения начального опорного решения</u>
- Метод вычеркивания.
- Метод северо-западного угла
- Распределительный метод
- Метод потенциалов

Наиболее распространенным методов решения транспортных задач является метод потенциалов.

Пусть $X=(x_{ij})$ транспортной задачи будет являться оптимальным, если существует система *m+n* чисел α_i, β_j, называемых потенциалами, удовлетворяющие условиям:

Если $Z_{\min}(X)$, то $\begin{cases} \alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ для занятых клеток, где } x_{ij}>0, \\ \alpha_i+\beta_j \le c_{ij} \text{ для незанятых клеток, где } x_{ij}=0. \end{cases}$

Если $Z_{\max}(X)$, то $\begin{cases} \alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ для занятых клеток, где } x_{ij}>0, \\ \alpha_i+\beta_j \ge c_{ij} \text{ для незанятых клеток, где } x_{ij}=0. \end{cases}$

Потенциалы α_i, β_j обозначают оплату за перевозку единицы груза в пунктах отправления (поставщиками) и назначения (потребителями) соответственно, поэтому их сумма равна транспортному тарифу $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.

Оценка свободной клетки таблицы: $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$. Если среди оценок Δ_{ij} нет положительных (задача поставлена на минимум), то опорный план является оптимальным.

Алгоритм решения:

1. Проверка выполнения необходимого и достаточного условия разрешимости задачи.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей.

Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Разработка начального плана (опорное решение). Это осуществляют разными методами: методом северно-западного угла; методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом. Проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть *m+n-1*) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Проверка вырожденности плана. Потенциалы α_i, β_j могут быть рассчитаны только для вырожденного плана. Если число занятых клеток в опорном плане меньше, чем *m+n-1,* то не хватит количества уравнений для определения потенциалов, поэтому вносим нуль в одну из свободных клеток таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным *m+n-1*. Нуль вводят в клетку с наименьшим тарифом, например в клетку одновременно вычеркиваемых строки и столбца таблицы при составлении нового плана. При этом фиктивно занятая нулем клетка не должна образовывать замкнутого прямоугольного контура с другими клетками таблицы.

Определение значения функции цели путем суммирования произведений тарифа (удельных затрат) на объем перевозимого груза по всем занятым клеткам таблицы.

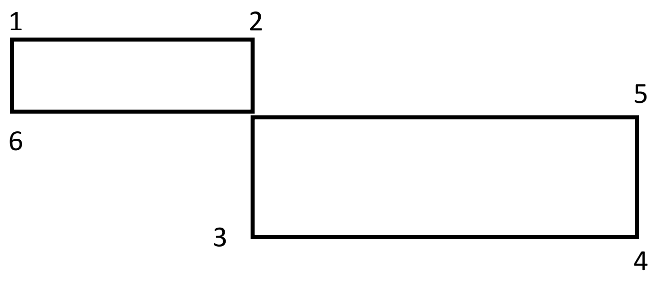
4. Проверка плана на оптимальность. Определяем потенциалы α_i, β_j. Для каждой занятой клетки таблицы записываем уравнения $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$. Получим систему *m+n-1* уравнений с *m+n* переменными.

Так как число переменных больше числа уравнений (*m+n> m+n-1*), то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений. Поэтому, одному из неизвестных потенциалов α_i, β_j задают произвольное значение, например для простоты вычислений полагаем $\alpha_i = 0$. Тогда остальные потенциалы определяются из приведенных соотношений. В транспортную таблицу добавляются дополнительная строка и столбец, куда заносят потенциалы.

Определяем оценку свободных клеток Δ_{ij}:

- если все $\Delta_{ij} \le 0$ (задача решается на минимум целевой функции) либо все $\Delta_{ij} \ge 0$ (задача решается на максимум целевой функции), то оптимальный план найден. Если хотя бы одна оценка свободной клетки $\Delta_{ij} > 0$ (задача поставлена на минимум) или $\Delta_{ij} < 0$ (задача поставлена на максимум), план не является оптимальным, его можно улучшить, осуществив перераспределение груза.

5. Поиск максимального звена неоптимальности (если условие п.4 не было достигнуто). Из всех положительных оценок свободных клеток выбираем наибольшую (если задача поставлена на минимум), из отрицательных – наибольшую по абсолютной величине (если задача поставлена на максимум). Клетку, которой соответствует наибольшая оценка, следует заполнить, т.е. направить груз. Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых и связанных с заполняемой так называемым циклом.



6. Составление контура перераспределения ресурсов.

Циклом, или прямоугольным контуром, в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.

Вершинами цикла, начиная от вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваем поочередно знаки (+) и (-).Контур перераспределения ресурсов составляют по следующему ***правила***:

1. Этот контур представляет замкнутый многоугольник с вершинами в загруженных клетках, за исключением клетки с вершиной максимальной неоптимальности (+), и звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы;
2. Ломаная линия должна быть связанной в том смысле, что из любой ее вершины можно попасть в любую другую вершину по звеньям ломаной цепи (по строке или столбцу);
3. В каждой вершине контура встречаются только два звена, одно из них располагается по строке, другое – по столбцу;
4. Число вершин контура четное, все они в процессе перераспределения делятся на загружаемые и разгружаемые;
5. В каждой строке (столбце) имеются две вершины: одна – загружаемая, другая – разгружаемая;
6. Перераспределение ресурсов по контуру осуществляется с целью получения оптимального плана. В процессе перераспределения ресурсов по контуру в соответствии с условием неотрицательности переменных x_{ij} ни одно из этих значений не должно превратиться в отрицательное число.

7. Определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение ресурсов по контуру. Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее и обозначаем его *θ (λ)*. Перераспределяем величину *j* по циклу, прибавляя *θ(λ)* к соответствующим объемам груза, стоящим в плюсовых клетках, и вычитая *θ(λ)* из объемов груза, находящихся минусовых клетках таблицы. В результате клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а одна из занятых клеток цикла становится свободной.

8. Получаем новый опорный план и его проверяем на оптимальность.

Примечание:

- если в минусовых клетках построенного цикла находятся два (или несколько) одинаковых минимальных значения (x_{ij}), то при перераспределении объемов груза освобождаются две (или несколько) клеток и план становится вырожденным. Для продолжения решения необходимо одну или несколько освобождающихся клеток таблицы занять нулем, причем предпочтение отдается клетке с наименьшим тарифом. Нулей вводится столько, чтобы во вновь полученном опорном плане число занятых клеток было равно *m+n-1* .
- если в оптимальном плане транспортной задачи оценка свободной клетки равна нулю $\Delta_{ij} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов. Для клетки с нулевой оценкой можно построить цикл и перераспределить груз. В результате полученный оптимальный план будет иметь такое же значение целевой функции.

Значение целевой функции на каждой итерации можно рассчитать следующим образом:

$Z(X_k) = Z(X_{k-1}) - \Theta \cdot \Delta_{ij}$ - задача поставлена на минимум;

$Z(X_k) = Z(X_{k-1}) + \Theta \cdot \Delta_{ij}$ - задача поставлена на максимум, где

Θ – величина перемещаемого по циклу объема груза;

Δ_{ij} - оценка свободной клетки, в которую направляется груз при переходе к новому плану;

$Z(X_k)$ - значение целевой функции на *k*-й итерации;

$Z(X_{k-1})$- значение целевой функции на предыдущей итерации.