

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1 Содержание математических моделей и методика их построения.

Содержанием любой математической модели является выраженная в математических соотношениях любая (экономическая) сущность условий задачи и поставленной цели. Математические модели включают в себя систему ограничений, целевую функцию.

Система ограничений состоит из отдельных математических уравнений или неравенств, называемых балансовыми уравнениями или неравенствами. Целевая функция связывает между собой различные величины модели. В качестве цели выбираются следующие показатели: прибыль, рентабельность, себестоимость, валовая продукция и т.д. Поэтому целевую функцию иногда называют критериальной. Целевая функция – функция многих переменных величин и может иметь свободный член.

Решением математической модели, или допустимым планом называется набор значений неизвестных, который удовлетворяет ее системе ограничений. Модель имеет множество решений, или множество допустимых планов, и среди них нужно найти единственное, удовлетворяющее системе ограничений и целевой функции. Допустимый план, удовлетворяющий целевой функции, называется оптимальным. Среди допустимых планов, удовлетворяющих целевой функции, как правило, имеется единственный план, для которого целевая функция и критерий оптимальности имеют максимальное или минимальное значение. Если модель имеет множество оптимальных планов, то для каждого из них значение целевой функции одинаково.

Если математическая модель задачи линейна, то оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений. В случае нелинейной модели оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции может быть несколько. Поэтому необходимо определять экстремальные планы и экстремальные значения целевой функции. План, для которого целевая функция модели имеет экстремальное значение, называется экстремальным планом, или экстремальным решением.

Целевая функция, зависящая от переменных величин в заданной области изменения последних, всегда достигает наибольшего и наименьшего значения или вовсе его не имеет. Экстремальные значения целевой функции достигаются внутри, а оптимальные значения достигаются также на границе области изменения переменных. Поэтому экстремальные значения целевой функции могут совпадать с оптимальными, однако это не значит, что все оптимальные значения целевой функции есть экстремальные.

Для принятия оптимального решения любой задачи необходимо построить ее математическую модель, включающую в себя:

- систему ограничений;
- целевую функцию;
- критерия оптимальности;
- решение.

Методика построения математической модели состоит в том, чтобы экономическую сущность задачи представить математически, используя различные символы, переменные и постоянные величины, индексы и другие обозначения.

Все условия задачи необходимо записать в виде уравнений или неравенств. Поэтому, в первую очередь необходимо определить систему переменных величин, которые могут для конкретной задачи обозначить искомый объем производства продукции на предприятии, количество перевозимого груза поставщиками конкретными потребителями и т.д. Как правило, для обозначения переменных величин используются буквы: x , y , z , а также их модификации. Например, модификация переменной x : $\bar{x}$; x ; x_1 ; x_{ij} ; x_{isj} и т.д.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут обозначать объем производства продукции соответственно первого, второго и так далее n -вида. Переменные x_{isj} могут обозначать объемы производства i -го вида изготовленной на s -м оборудовании j -м технологическим способом. Для индексации

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i; i = \overline{1, m} \quad (3)$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$Z(\overline{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (5)$$

1.2. Построение математических моделей задач линейного программирования

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответа на следующие вопросы:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать **переменные** данной задачи?
2. Какие **ограничения** должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?
3. В чем состоит **цель задачи**, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примерах.

1. Задача об оптимальном использовании ресурсов

Предприятие может выпускать n видов продукции, используя для этого m видов ресурсов. Известны затраты каждого вида ресурса на производство единицы каждого вида продукции и прибыль от реализации единицы каждого вида продукции.

Требуется составить план выпуска продукции так, что бы при данных запасах ресурсов получить максимальную прибыль.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначения:

$b_i; i = \overline{1, m}$ - запасы i -го вида ресурса;

$a_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ - затраты i -го вида ресурса на производство единицы j -го вида продукции;

$c_j; j = \overline{1, n}$ -прибыль от реализации единицы j -го вида продукции.

Данные задачи можно представить в виде таблицы:

Виды ресурсов	Виды продукции				Запасы ресурсов
	1	2		n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
....					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Прибыль от реализации единицы продукции	c_1	c_2		c_n	

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{array} \right.$$

2. Задача на оптимальный раскрой материала.

Требуется определить, какое количество прутков следует разрезать по каждому варианту, чтобы получить заданное количество заготовок различной длины и чтобы общая длина концевых отрезков была минимальной.

$$i \text{ - номер вида заготовки, } i = \overline{1, m};$$

a_{ij} – количество заготовок i-го вида, получаемых из одного прутка, разрезаемого по j-му варианту;

C_j – длина концевой отрезка, оставшегося от одного прутка при разрезании прутка по j-му варианту.

Виды заготовок	Варианты раскроя				План заготовок
	1	2		n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
....					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Длина концевой отрезка	c_1	c_2		c_n	

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}. \text{Целевая функция } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n. \text{ План раскроя}$$

3. Задача об использовании мощностей (загрузки оборудования)

4

$S_1; S_2; \dots S_m$, для каждого из которых известны производительность a_{ij} (т.е. число единиц продукции P_j , которое можно произвести на станке S_i за единицу времени) и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить план работы станков (т.е. распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Обозначим x_{ij} — время, в течение которого станок $S_i; i = \overline{1, m}$ будет занят изготовлением продукции $P_j; j = \overline{1, k}$. Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T , то

[illegible]

Для выполнения плана выпуска номенклатуры. Необходимо, чтобы выполнялись равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} = n_1; \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} = n_2; \\ \dots\dots\dots; \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \dots + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{array} \right.$$

Затраты на производство всей продукции должны быть минимальными:

$$Z(\overline{X}) = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots + b_{mk}x_{mk} \rightarrow \min$$

4. Задача о диете

В продаже имеются различные виды продуктов. Известны цены продуктов, содержание питательных веществ в единице каждого вида продукта, медицинские требования на содержание питательных веществ в суточной диете. Требуется определить, какие продукты и в каком количестве нужно включить в диету, чтобы она соответствовала всем медицинским требованиям и чтобы стоимость диеты была минимальной.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначение:

a_{ij} — содержание i-го питательного вещества в единицу j-го продукта;

b_i – минимальное содержание i -го питательного вещества в суточной диете;

C_j – цена единицы j-го продукта.

Данные задачи можно представить в виде таблицы:

Виды питательных веществ	Виды продуктов				Медицинское требование к диете
	1	2		n	
1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
....					
m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_m
Длина конечного отрезка	c_1	c_2		c_n	

$$\text{ограничений: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}. \text{ Целевая функция } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + + c_nx_n.$$
